Série A, N° 1926
N° d'ordre : 2697

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ISAAC TARRAB

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES, LICENCIÉ ÈS SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

1re **THÈSE.** — RECHERCHES SUR LES MASSIFS PULVÉRULENTS A PAROI INCLINÉE ET TALUS PLAN. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE BOUSSINESQ.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 juillet 1938 devant la Commission d'examen.

MM. VILLAT, *Président.*

BÉGHIN, VILLEY, } *Examinateurs.*

TARRAB

Isaac

PREMIÈRE THÈSE

RECHERCHES

SUR LES

MASSIFS PULVÉRULENTS

A PAROI INCLINÉE

ET TALUS PLAN

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE BOUSSINESQ

Commission d'examen

Villat / Président

M. M. Beghin
Villey } examinateurs

PARIS
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE CENTRALES DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX
SOCIÉTÉ ANONYME AU CAPITAL DE TROIS MILLIONS
Rue Bergère, 20
1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.
Doyen . . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	BLAISE.	G. BERTRAND.
A. FERNBACH.	DANGEARD.	ABRAHAM.
Émile PICARD.	LESPIEAU.	Ch. FABRY.
Léon BRILLOUIN.	MARCHIS.	Léon BERTRAND.
GUILLET.	VESSIOT.	WINTREBERT.
PÉCHARD.	PORTIER.	DUBOSCQ.
FREUNDLER.	MOLLIARD.	BOHN.
AUGER.	LAPICQUE.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY . . T Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN . . . T Chimie générale.
Émile BOREL . . T Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN . . T Chimie physique.
E. CARTAN . . . T Géométrie supérieure.
A. COTTON . . . T Recherches physiques.
J. DRACH . . . . T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ . T Zoologie.
E. RABAUD . . . T Biologie expérimentale.
M. GUICHARD . . Chimie minérale.
Paul MONTEL . . T Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM . T Botanique.
G. JULIA . . . . T Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN. . . T Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY. T Pétrographie.
H. BÉNARD . . . T Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY . . . T Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD . . . T Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH. . T Physique.
G. BRUHAT . . . T Physique théorique et physique céleste.
E. DARMOIS. . . T Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE . . T Physique Générale et Radioactivité.
A. DUFOUR . . . T Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER. . . Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND. T Botanique.
M. JAVILLIER . . T Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY . . T Physiologie comparée.
F. PICARD . . . Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT . . T Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB . . . T Géologie.
P. PASCAL . . . T Chimie minérale.
M. FRÉCHET . . . T Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON . . T Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS. T Chimie organique.
H. BÉGHIN . . . T Mécanique physique et expérimentale.
FOCH. . . . . Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER. . . Physique (P. C. B.).
De BROGLIE. . . T Théories physiques.
CHRÉTIEN. . . . Optique appliquée.
P. JOB . . . . . Chimie générale.
LABROUSTE . . . Physique du Globe.
PRENANT . . . . T Anatomie et histologie comparée.
VILLEY . . . . . Mécanique physique et expérimentale.
COMBES. . . . . T Physiologie végétale.
GARNIER . . . . T Mathématiques générales.
PÉRÈS . . . . . Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL . . . Chimie (P. C. B.).
LAUGIER . . . . T Physiologie générale.
TOUSSAINT . . . Technique Aéronautique.
M. CURIE . . . . Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD . . . T Hautes températures.
CHAZY . . . . . T Mécanique rationnelle.
GAULT . . . . . Chimie (P. C. B.).
CROZE . . . . . Recherches physiques.
DUPONT. . . . . T Théories chimiques.
LANQUINE. . . . T Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON . . . . Mathématiques générales.
BARRABÉ . . . . Géologie structurale et Géologie appliquée.
MILLOT. . . . . Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN . . . Théories physiques.
VAVON . . . . . Chimie organique.
G. DARMOIS. . . Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
CHATTON . . . . T Biologie maritime.
AUBEL . . . . . Chimie biologique.
Jacques BOURCART. Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL . . . Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES. . . . Enseignement de Physique.
GRASSÉ. . . . . Biologie animale (P. C. B.).
PRÉVOST . . . . Chimie (P. C. B.).

Secrétaire. . . . . A. PACAUD.
Secrétaire honoraire . . . . . D. TOMBECK.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

PREMIÈRE THÈSE

RECHERCHES

SUR LES

MASSIFS PULVÉRULENTS

A PAROI INCLINÉE ET TALUS PLAN

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE BOUSSINESQ

INTRODUCTION

SOMMAIRE. — Historique de la question. — Intérêt de la méthode de Coulomb. But du présent travail.

Il ne semble pas qu'on ait envisagé l'étude rationnelle de la poussée des terres avant Coulomb. Des résultats d'ordre empirique étaient utilisés pour le calcul des « revêtements ». D'ailleurs Coulomb lui-même ne s'est occupé qu'indirectement de la question dans le but de vérifier sa théorie sur le frottement.

Dans son mémoire célèbre publié en 1773 (1), on peut déjà dégager les idées fondamentales relatives à l'équilibre des masses pulvérulentes. Il mit en évidence l'existence d'une infinité d'équilibres possibles, compris entre deux limites : plus grande et plus petite limites (butée et poussée). Ces équilibres donnent lieu à des inégalités mathématiques qui se réduisent à des équations pour les deux limites.

Dans le cas d'une rupture et d'un déversement du mur c'est la plus petite limite ou poussée qui entre en ligne de compte. Un coin du massif tend à se détacher par glissement sur le mur et sur une surface cylindrique S, tout ceci bien entendu est relatif au problème plan. Le massif tout entier est à l'état d'équilibre-limite ou ébouleux.

C'est pour être dans le cas le plus défavorable que Coulomb a préco

(1) *Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris*, t. VII, 1773, p. 359.

nisé la recherche de la surface S donnant la poussée la plus grande. Comme « l'expérience donne à peu près une ligne droite » pour ligne de rupture et, d'ailleurs, prévoyant la difficulté de l'étude d'une surface S quelconque, il a été amené à supposer cette surface plane et à chercher le plan de glissement qui donne la poussée la plus grande.

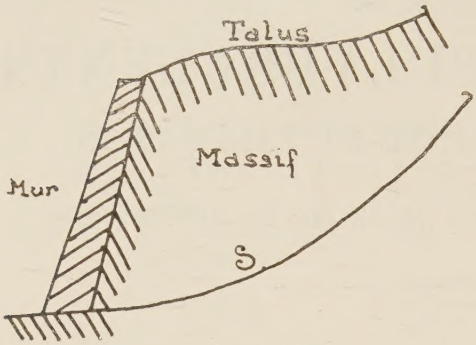

Fig. 1.

Il a montré ensuite que le défaut de sa méthode réside dans le fait que la poussée trouvée est inférieure à la plus grande limite inférieure théorique. Il a même essayé, sans trop de succès d'ailleurs, de donner une méthode plus précise de recherche de la surface S et de calcul de la poussée.

Cette méthode simple a donné lieu à différentes recherches toutes d'ordre pratique faites par des ingénieurs de la première moitié du XIXe siècle.

Pour calculer la poussée, tout au moins dans le cas de la construction des murs de soutènement de dimensions moyennes, on fait encore appel à la construction géométrique de Poncelet.

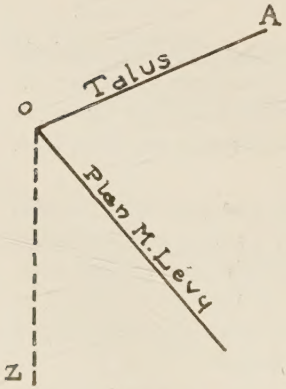

Fig. 2.

C'est en 1856, que Rankine, le premier, a essayé d'étudier plus rationnellement la question. Il s'est proposé d'établir les conditions d'équilibre intérieur d'un massif dépourvu de cohésion. Il a résolu le problème dans le cas particulièrement simple d'un massif indéfini à talus plan.

Vers 1870, Maurice Lévy (1), n'ayant aucune connaissance des travaux de Rankine, retrouve les mêmes résultats, sous une forme différente d'ailleurs. En outre, il met en évidence l'existence d'une direction de glissement telle que l'introduction d'un mur rugueux suivant cette même direction et remplaçant la partie du massif située à son arrière, ne change pas l'équilibre déjà étudié de la seconde partie du massif.

Maurice Lévy, s'attaquant ensuite aux différentes hypothèses de

(1) *Journal des Mathématiques*, 2e série, t. XVIII, 1873, p. 241.

Coulomb, a démontré que les lignes de glissement, toutes les fois qu'elles sont planes, sont parallèles entre elles et les deux théories coïncident. Mais, en général, ces lignes sont courbes, fait que Coulomb avait bien remarqué.

Ainsi, Maurice Lévy, après avoir rejeté comme fausse la méthode de Coulomb n'a en fait donné qu'une solution particulière du problème de la poussée des terres. Barré de Saint-Venant (1) eut alors l'idée d'en déduire une solution approchée des cas voisins où l'inclinaison du mur sur la verticale différerait un peu de celle théorique du plan idéal de M. Lévy. Ce fut le point de départ des travaux de Boussinesq. Il publia dès 1873 différents ouvrages (2) et trouva des valeurs par défaut et par excès de la poussée grâce à l'introduction théorique de massifs hétérogènes convenablement choisis. Il a démontré que, au delà du plan idéal de Maurice Lévy, le massif se comporte toujours de la même façon quelle que soit la position du mur. Il n'y a donc lieu de corriger la solution Rankine-Lévy qu'en deçà de ce plan. D'ailleurs, les formules Rankine-Lévy, comme l'a montré Saint-Venant donnent toujours des résultats par excès, ce qui pourrait justifier leur application pratique.

Boussinesq n'a développé sa méthode qu'au cas très simple d'un talus horizontal et d'un mur vertical. M. Callandreau, dans sa thèse, l'a généralisée pour un talus plan quelconque, le mur étant toujours vertical. Il a donné une table des coefficients de poussée résultant des formules très précises qu'il a trouvées.

Boussinesq, reprenant le principe de maximum dû à Coulomb, a démontré qu'effectivement la surface S de séparation ou de rupture dans le massif, partout supposé à l'état d'équilibre-limite ou ébouleux, est précisément celle qui donne la poussée maximum sur le mur. Ainsi, le principe de maximum, que Coulomb a admis dans un but utilitaire, se trouve justifié si l'on admet l'établissement instantané de l'état ébouleux dans le massif. La méthode de Coulomb, assimilant la surface S de rupture à un plan, donne donc des valeurs légèrement par défaut des coefficients de poussée.

Résal (3), connaissant les remarquables propriétés du plan Maurice Lévy trouvées par Boussinesq, a cherché à évaluer la poussée en introduisant différentes courbes caractérisques du massif : ligne de poussée et lignes de charge, enveloppes de la direction conjuguée de la verticale en un point, les courbes sont la solution générale d'une équation différentielle non intégrable. Un calcul approché aux différences finies lui a donné les valeurs du coefficient de poussée dans les

(1) *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 14 février 1870, et *Journal des Mathématiques*, 2e série, t. XV, 1870, p. 237.

(2) *Annales École normale*, 3e série, t. XXXIV, 1917; *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 22-29 avril, 13 mai, 10 et 17 juin 1918.

(3) Résal, *Théorie de la poussée des terres* (Paris, Bérenger, 1903-1910).

différents cas. Il a donné, en 1903, des tables complètes des coefficients de poussée lesquelles ont été corrigées en 1910. Signalons qu'il a essayé de tenir compte de la cohésion de la matière constituant le massif en introduisant dans ses calculs un angle virtuel du frottement, intéressant surtout dans les cas des terrains argileux.

Résal reprochait à la méthode de Coulomb de donner des coefficients trop grands et à celle de Boussinesq, d'être trop restreinte. Les travaux de Boussinesq montrent l'inexactitude de ces deux affirmations.

Depuis Résal, différents ouvrages (1) relatifs à la théorie de la poussée des terres ont paru. Signalons l'étude récente faite par M. Caquot sur les massifs à frottement interne où il a donné une interprétation relative aux phénomènes de l'équilibre des terres à l'aide du cercle de Mohr et de la courbe intrinsèque. La méthode de calcul qu'il a imaginée n'a encore été l'objet d'aucun travail, à notre connaissance.

Le présent travail a pour but de montrer les avantages de la méthode de Boussinesq, de donner une interprétation physique des résultats obtenus et enfin d'étendre cette même méthode au cas d'un massif pulvérulent en pente soutenu par un mur d'inclinaison quelconque.

CHAPITRE PREMIER

Sommaire. — Hypothèses relatives aux « semi-fluides » et « massifs pulvérulents ». Équation d'équilibre-limite d'un massif de terre pulvérulent et homogène.

Nous n'avons pas à discuter ici les différentes hypothèses relatives aux « semi-fluides ». Mais nous avons jugé nécessaire de donner un aperçu de toute la théorie servant de base à l'étude de la poussée des terres. Cette théorie donne en particulier une signification physique à certaines grandeurs introduites dans les équations d'équilibre-limite. Ces équations peuvent être simplement trouvées, comme l'a fait Rankine, en utilisant la répartition connue des efforts autour d'un point d'un milieu quelconque mais homogène et en supposant que le glissement dans le massif se produit dès que l'angle de plus grande obliquité dépasse l'angle φ de frottement intérieur.

(1) M. Caquot : *Équilibre des massifs à frottement interne* (Gauthier-Villars, 1934).

(2) M. Callandreau : *Thèse de doctorat* (Gauthier-Villars, mars 1931) ; *Bulletin de la Société de Mathématiques* (1932) ; *Mémoire de la Société des Ingénieurs civils* (janvier-février 1932).

La matière considérée est composée de grains très petits dont la forme et le groupement dans le massif qu'ils constituent sont absolument quelconques et régies par les lois du hasard. Si, par la pensée, nous isolons dans ce massif un petit groupement de ces grains, formant une particule, cet ensemble est considéré comme plus déformable que compressible. On peut facilement réaliser cette propriété à l'aide d'un sac rempli de sable qui conserve un volume constant quel que soit la forme donnée au sac C'est aussi une propriété des fluides liquides d'avoir une compressibilité négligeable et une déformabilité parfaite.

Les deux faits d'une répartition quelconque des grains et particules dans le massif et de l'incompressibilité nous permettent de considérer ce massif comme formant un ensemble homogène, statistiquement isotrope et de densité constante. Cette densité dépend de la nature physique du terrain et du degré de son tassement. En effet, l'enchevêtrement plus ou moins parfait des grains entre-eux influe sur le vide existant entre ces mêmes grains.

Les particules sont incapables de supporter des efforts de traction et de cisaillement simple. Elles ne sont retenues en contact les unes des autres que par leur pression mutuelle et par le frottement qui en résulte. Elles sont supposées, en particulier, dépourvues de toute cohésion.

Il existe, pour chaque particule, un « état naturel » théorique dans lequel aucune action ne s'exerce entre ses grains.

A partir de cet état naturel, la particule peut éprouver des contractions d'ensemble, d'ailleurs négligeables, et capable de produire entre les grains une pression commune p que nous considérerons comme positive.

D'autres déformations se produisent suivant trois directions rectangulaires, assimilables à trois dilatations ou contractions principales δ_1, δ_2, δ_3, dues à des roulements des grains les uns devant les autres et produisant sur les éléments plans, respectivement perpendiculaires à ces directions de trois pressions principales P_1, P_2, P_3 que nous considérerons comme négatives.

Il est facile de voir que l'on a :

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = -p.$$

Du fait du frottement une particule possède une certaine rigidité transversale. Le coefficient de Lamé correspondant, au lieu d'être constant, comme dans les corps étudiés dans la théorie de l'élasticité, ou nul comme dans les liquides parfaits, est supposé proportionnel à la pression moyenne p. C'est de là que vient la dénomination de semi-fluides à cette espèce de matière. On peut alors écrire, n étant un coefficient caractéristique de la matière :

$$\frac{P_1 - P_2}{2(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{P_2 - P_3}{2(\delta_2 - \delta_3)} = \frac{P_3 - P_1}{2(\delta_3 - \delta_1)} = np.$$

Or nous avons à étudier l'équilibre d'une masse pulvérulente soutenue par un mur. Le problème est plan et la dilatation perpendiculaire au plan de symétrie δ_3 est nulle. En supposant les diverses dimensions principales d'une particule, à l'état naturel, peu differentes, on peut écrire :

$$\delta_1 + \delta_2 = 0.$$

Ce qui donne immédiatement :

$$\frac{P_1 - P_2}{4\delta_1} = np \qquad (1)$$

$$p = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2) = -P_3 \qquad (2)$$

et

$$\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = 2n\delta_1. \qquad (3)$$

Or, si l'on désigne par :

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{N}$, les composantes tangentielle et normale de la pression en un point;

γ, l'angle que forme avec la direction de la plus grande des deux pressions principales P_2 l'élément plan du petit prisme sur lequel agit la pression en question.

On a :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{P_1 - P_2}{2}\sin 2\gamma, \\ \mathfrak{N} &= \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2}\cos 2\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

L'inclinaison γ correspondant à l'élément plan sur lequel s'exerce la pression la plus oblique, s'obtient en annulant la dérivée par rapport à γ du quotient $\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}}$.

Cette valeur de γ est définie par :

$$\cos 2\gamma = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}$$

et on a alors :

$$\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}} = \frac{P_2 - P_1}{2\sqrt{P_1 P_2}}. \qquad (5)$$

Or, nous avons vu que les particules supposées sans cohésion ne sont retenues en contact les unes des autres que par le frottement. L'analogie des deux couches pulvérulentes que sépare un élément plan avec deux solides tendant à glisser l'un contre l'autre, porte à étendre aux premières la loi usuelle du frottement des solides et à écrire :

$$\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}} < \operatorname{tg}\varphi,$$

φ étant l'angle de frottement intérieur du massif, ou bien l'angle de talus naturel, comme il est facile de le voir.

Mais, nous avons en vue, dans cette étude, le calcul de la résistance que doit avoir un mur de soutènement. Une paroi peu résistante tend à être renversée. D'un état d'équilibre quelconque qu'il avait, le massif passe alors par l'intermédiaire de tout un ensemble d'états d'équilibre jusqu'à un équilibre-limite après lequel il y a rupture. La terre glisse alors le long du mur et d'une surface en son intérieur. En tous les points de ces surfaces, en prenant φ comme angle de frottement terre-paroi, on a :

$$\frac{\tau}{\mathcal{N}} = \operatorname{tg} \varphi.$$

On peut admettre avec Boussinesq comme vraisemblable que, dès le début de l'ébranlement du mur, la rupture atteindra, à la fois ou presque à la fois, sur toute la profondeur et sur l'épaisseur du massif, un volume considérable de matière pulvérulente, contrairement à ce qui arriverait pour un massif pourvu de cohésion où la rupture n'atteindrait immédiatement que la région la plus chargée et surtout la plus tirée.

Ainsi, un équilibre-limite serait atteint partout dans la masse, et cet équilibre a lieu sans que les diverses particules aient sensiblement bougé ou aient pris une vitesse quelconque. Il suffirait donc de donner au mur une résistance capable de vaincre justement la poussée ainsi exercée sur lui au moment dangereux de l'équilibre-limite du massif et capable, par conséquent, d'empêcher un tel état de se produire.

Grâce à cette hypothèse d'équilibre-limite, ou *d'état éboulleux partout réalisé*, l'inégalité précédente devient une égalité et le calcul de la poussée devient possible, tout au moins théoriquement. Nous faisons abstraction évidemment des perturbations dues au voisinage du fond solide.

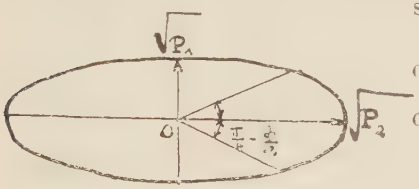

Fig. 3.

Des relations (5) on tire immédiatement :

$$\cos 2\gamma = \sin \varphi = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1}. \quad (6)$$

Ce qui donne :

$$\gamma = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \quad (7)$$

La formule (6) montre que, pour une terre donnée, le rapport des deux pressions principales est constant :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

L'ellipse ~~des fatigues de Lamé~~ direction en un point est donc semblable à elle-même dans tout le massif. Les éléments soumis aux actions les plus obliques et ces actions elle-mêmes font toujours avec la plus

grande pression principale un des angles $\pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$. Ces deux directives sont d'ailleurs conjuguées. La matière se dilate dans le sens de la plus petite pression isostatique P_1. Résal a utilisé cette propriété pour différencier la poussée de la butée. Nous aurons l'occasion de revenir là-dessus plus loin.

Par ailleurs, si nous remarquons que, au moment de l'équilibre-limite, on a :

$$\sin\varphi = 2n\delta_1.$$

Nous voyons que δ_1 comporte, pour chaque matière pulvérulente, une limite supérieure $\frac{\sin\varphi}{2n}$ qui est en quelque sorte une limite d'élasticité.

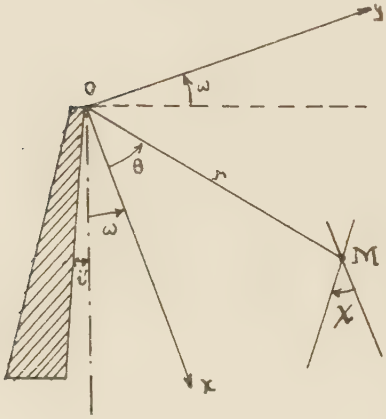

Fig. 4.

On a, en fin de compte :

$$\left.\begin{aligned} &P_1 + P_2 = -2p \\ &\text{et l'équation (6) s'écrit} \\ &P_1 - P_2 = 2p\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Jusqu'ici, nous n'avions rapporté notre massif à aucun système d'axes. Soit donc le profil rectiligne du talus incliné de l'angle ω positif dans le cas de la figure : nous le prenons comme axe des y. L'axe des x est dirigé vers le bas. Soit χ l'angle aigu que fait avec Ox la plus grande des pressions principales. Si N_1, N_2 et T_3 désignent les efforts agissant en un point suivant les directions Ox et Oy, on a :

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{N_1+N_2}{2} + \frac{N_2-N_1}{2\cos 2\chi}, \\ P_2 &= \frac{N_1+N_2}{2} - \frac{N_2-N_1}{2\cos 2\chi}, \\ T_3 &= -\frac{N_2-N_1}{2}\operatorname{tg} 2\chi. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

D'où l'on tire immédiatement, en portant dans les équations (8)

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= -p(1+\sin\varphi\cos 2\chi), \\ N_2 &= -p(1-\sin\varphi\cos 2\chi), \\ T_3 &= -p\sin\varphi\sin 2\chi. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Ces efforts doivent vérifier les deux équations indéfinies de l'équilibre :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \rho X = 0; \qquad \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \rho Y = 0.$$

où ρ représente la densité au point M et X, Y, les composantes des forces extérieures agissant sur l'élément de volume.

Si Π est le poids spécifique de la masse pulvérulente, les équations indéfinies de l'équilibre s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} + \sin\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x}(p\cos 2\chi) + \frac{\partial}{\partial y}(p\sin 2\chi)\right] - \rho X = 0,\\ &\frac{\partial p}{\partial y} + \sin\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x}(p\sin 2\chi) - \frac{\partial}{\partial y}(p\cos 2\chi)\right] - \rho Y = 0.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Et, en passant en coordonnées polaires, ces équations s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} &[\cos\theta + \sin\varphi\cos(2\chi-\theta)]\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}[-\sin\theta + \sin\varphi\sin(2\chi-\theta)]\\ &\quad - 2p\sin\varphi\sin(2\chi-\theta)\frac{\partial\chi}{\partial r} + 2\frac{p}{r}\sin\varphi\cos(2\chi-\theta)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \rho X = 0;\\ &[\sin\theta + \sin\varphi\sin(2\chi-\theta)]\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}[\cos\theta - \sin\varphi\cos(2\chi-\theta)]\\ &\quad + 2p\sin\varphi\cos(2\chi-\theta)\frac{\partial\chi}{\partial r} + 2\frac{p}{r}\sin\varphi\sin(2\chi-\theta)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \rho Y = 0.\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

On a ainsi un système de deux équations (11) ou (12) trop complexe pour que la recherche de l'intégrale générale puisse être envisagée.

Cependant un calcul par différences finies permet de déterminer, comme l'a montré Boussinesq, et comme il est facile de le voir, les fonctions p et χ en chaque point du massif, si on suppose connues leurs valeurs sur le talus et en admettant qu'il n'y a aucune singularité en chemin ce qui, d'ailleurs, n'est pas le cas.

En fait, on se borne au cas où les lignes d'égale inclinaison χ sont des droites passant par 0 où se coupent le profil supérieur du massif et celui du mur. χ ne dépend donc plus que de θ et l'on reconnaît que, par raison d'homogéinité, p est proportionnel à r, soit :

$$p = -\mathrm{P}r, \quad (13)$$

où P ne dépend que de l'angle θ.

Le système (12) s'écrit alors, en le simplifiant et en isolant les termes différentiels, comme l'a fait M. Callandreau :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{P}\sin 2(\chi-\theta) - \frac{d\mathrm{P}}{d\theta}[\cos 2(\chi-\theta) - \sin\varphi]\\ &\qquad = \Pi\sin(2\chi + \omega - \theta),\\ &\mathrm{P}\cos^2\varphi + 2\mathrm{P}\sin\varphi\frac{d\chi}{d\theta}\times[\cos 2(\chi-\theta) - \sin\varphi]\\ &\qquad = \Pi[\cos(\omega+\theta) - \sin\varphi\cos(2\chi+\omega-\theta)].\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Les conditions aux limites sont les valeurs particulières de p et χ à la surface libre et le glissement contre le mur. Ces conditions sont d'ailleurs surabondantes comme nous le verrons dans les chapitres qui suivent.

CHAPITRE II

Sommaire. — Solution du massif indéfini de Rankine. — Solution particulière Maurice Lévy. — Méthode de Boussinesq. — Calculs de Résal. — Comparaison des différentes méthodes.

Le système précédent s'intègre facilement dans le cas du massif de Rankine. Un tel massif est à surface libre, plane, indéfinie, et n'est pas soutenue par un mur. Alors p et χ ne dépendent nullement de y et même χ est constant et donné par l'équation :

$$\sin \omega + \sin \varphi \sin (2\chi + \omega) = 0. \qquad (15)$$

En posant $\sin \omega' = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}$ avec ω' aigu, cette équation a deux racines :

$$\chi_1 \quad \text{et} \quad \chi_2 ;$$

$$\chi_1 = -\frac{\omega + \omega'}{2}, \qquad \chi_2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\omega' - \omega}{2}.$$

Ces deux racines sont négatives et donnent deux directions de part et d'autre de la direction $-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right)$. Pour χ_1 ce sont les couches s'écartant peu de l'horizontale qui sont les plus fortement pressées et les couches verticales détendues. C'est le contraire pour χ_2.

Donc χ_1 correspond au phénomème de la poussée, seule valeur qui nous intéresse et χ_2 à la butée que nous écartons. L'équation (15) a une racine unique qui nous intéresse χ_1.

Quant à p, sa valeur est donnée par :

$$p = +\frac{\Pi \sin \omega \times x}{\sin \varphi \sin 2\chi_1}. \qquad (16)$$

Dans le massif indéfini de Rankine, une des deux directions de glissement est particulièrement intéressante. C'est la direction du plan Maurice Lévy. Elle fait avec la plus grande pression principale P_2 en un point, l'angle $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ vers les y positifs.

Son azimut est donc égal à :

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \chi_1.$$

et si i est l'angle positif qu'elle fait avec la verticale, on a :

$$i = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \omega - \chi_1. \qquad (17)$$

Si ce nouveau plan, avec la partie du massif située à son arrière, devient un mur rugueux, la masse sablonneuse subsistante sera sur le point de glisser contre lui *en s'abaissant*. La poussée sera celle qu'on aurait besoin d'évaluer et l'équilibre est le même que celui de Rankine-Lévy. Cette poussée est égale à :

$$\mathcal{P} = \Pi r \times \cos(\varphi + i) \qquad (18)$$

par unité d'aire.

C'est la formule Maurice Lévy.

Remarquons qu'on peut déterminer facilement et géométriquement la position du plan Maurice Lévy. M. d'Ocagnes a trouvé une construction très simple à l'aide des propriétés du cercle de Mohr. M. Callandreau en a donné une autre, basée sur une équation équivalente à l'équation (17). Nous en avons trouvé une troisième basée sur le fait que l'ellipse ~~de Lamé~~ directrice est connue en forme en tous les points du massif. A cet effet, comme il s'agit du massif de Rankine, nous connaissons en un point la direction conjuguée de la verticale. Il suffit d'avoir en grandeur les deux diamètres conjugués correspondants pour pouvoir construire les axes de l'ellipse et les directions de glissement immédiatement par une construction classique. Nous pouvons fixer arbitrairement la grandeur OA du demi-diamètre vertical par exemple. Traçons la droite horizontale A′OA″ et marquons A′ et A″ tels que OA′ = OA″ = OA. Nous connaissons la direction conjuguée OB de OA :

$$(OA'', OB) = \omega,$$

angle du talus.

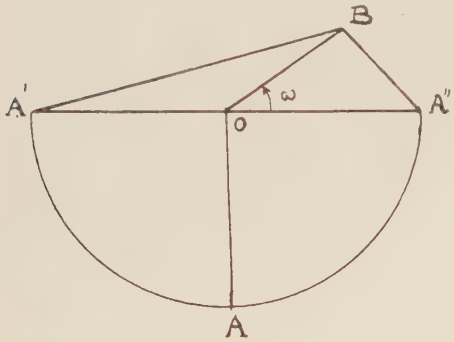

Fig. 5.

Si B était connu, les axes de l'ellipse ~~de Lamé~~ directrice seraient égaux en grandeur à BA′ et BA″. On doit donc avoir :

$$\frac{BA''}{BA'} = \sqrt{\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}}.$$

Le point B est donc sur un cercle centré sur A′A″ entre des points M tels que le rapport $\frac{MA'}{MA''}$ soit précisément $\sqrt{\frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}}$. On a en général deux points B correspondants aux deux équilibres-limites poussée et butée. Pour la poussée, on doit avoir OA > OB et la distinction est simple. Le point B trouvé, le reste de la construction est classique.

Revenons alors au massif à talus plan et soutenu par un mur d'inclinaison i' quelconque différente de i. Près de la surface libre et en dessous, où $p = 0$, la valeur y de la distance au mur est infiniment grande par rapport à x. Ceci permet de supposer les circonstances indé

pendantes de y aux petites profondeurs x et d'y appliquer les formules (15) et (16) relatives au massif indéfini de Rankine. Pour la circonstance, la formule (16) devient :

$$P = -\frac{H \sin \omega}{\sin \varphi \sin 2\chi} \cos \theta.$$

D'ailleurs cette solution vérifie toujours le système différentiel (14), mais la solution convenable doit donner une poussée telle, qu'il y ait, si possible, glissement du massif sur le mur au moment où l'équilibre-limite est établi.

A partir de ce résultat, Boussinesq a cherché d'abord à étudier un petit coin du massif, situé de part et d'autre du plan idéal de Maurice Lévy, où la solution est déjà trouvée. Il a introduit des termes correctifs à cette solution dans le but d'avoir contre le mur un glissement d'angle φ du massif. Cette méthode a pu être généralisée par l'introduction de massifs hétérogènes qui permettent d'avoir des limites supérieures et inférieures de la poussée.

Un peu plus tard Résal a étudié la question dans toute sa généralité. Il considère en chaque point la direction verticale et sa conjuguée dans l'ellipse ~~des fatigues de Lamé~~ dont nous avions dit un mot plus haut. Cette direction conjuguée enveloppe une série de courbes appelées lignes de charge. La ligne de poussée est une courbe particulière dans cet ensemble. Si, en un point, on connaît l'inclinaison de la ligne de charge, on peut calculer tous les éléments caractéristiques en ce point du massif, et en particulier la poussée élémentaire relative à une direction donnée. En effet, dans une ellipse, il y a deux directions conjuguées faisant un angle donné, compris entre deux limites qui sont ici $\frac{\pi}{2} - \varphi$ et $\frac{\pi}{2}$. Or, la connaissance de la ligne de charge en un point donne l'angle de la direction verticale en ce point et de sa conjuguée. L'ellipse ~~de Lamé~~, de forme invariable, peut être alors orientée de deux façons en ce point, suivant que l'on suppose le diamètre vertical plus grand ou plus petit que son conjugué. Résal suppose que, dans le cas de la poussée, le diamètre vertical est le plus grand. Alors la terre se détend dans une direction la plus proche de l'horizontale. Ceci nous semble assez arbitraire. Considérons, en effet, d'abord un coin du terrain proche du mur. Dans le cas d'une rupture et d'une possibilité de renversement, la terre se détend dans une direction la plus proche de la normale à ce mur. Si ce dernier est suffisamment incliné par rapport à la verticale, ceci se traduit par le fait que le diamètre vertical de l'ellipse ~~de Lamé~~ en un point est plus petit que son conjugué, contrairement à l'hypothèse de Résal. Quant à la partie du massif située assez loin du mur, rien ne permet de faire une hypothèse plutôt qu'une autre. Ainsi, la condition de glissement du haut du mur vers le bas, que nous cherchons à réaliser n'impose pas

l'hypothèse de Résal qui n'offre, comme nous venons de le voir, aucun caractère absolu.

En fait, les chiffres obtenus par Résal sont très satisfaisants et présentent, une coïncidence frappante avec ceux obtenus par la méthode de Boussinesq. Tant que le massif est en surplomb, ce fait n'est pas étonnant puisque Résal obtient un équilibre limite avec une réaction contre le mur faisant un angle φ vers le bas avec la normale à celui-ci. Mais lorsque le mur est en surplomb, Résal trouve des réactions terre-mur faisant, avec la normale à la paroi, un angle inférieur à φ, voire de signe contraire à celui qui impose le glissement sur le mur. Cela ne veut pas dire, comme certains auteurs l'ont affirmé, que les coefficients de poussée ainsi calculés sont trop grands, soit que le massif est moins résistant à l'éboulement. En effet, l'équilibre-limite ne peut être réalisé dans tout le massif, autrement dit le principe de l'état ébouleux est en défaut à partir du plan Maurice Lévy. Considérons pour cela les deux équations (14) ou d'autres équations similaires, plutôt, par exemple, celles établies par M. Caquot (1) que celles de Résal qui utilisent une propriété du massif souvent en défaut. Si nous faisons abstraction des discontinuités possibles dans les fonctions introduites ou dans leurs dérivées un calcul par différences finies donne, d'une façon aussi approchée qu'on le veut, les caractéristiques du massif en chacun de ses points et en particulier le long du mur. Il suffit, pour cela, qu'on ait ces mêmes caractéristiques le long d'un plan radial, qui est ici le plan du talus du massif. Supposons maintenant certaines discontinuités dans les fonctions introduites. Si ce fait a lieu en un point, il a lieu évidemment tout le long du plan radial passant par ce point. Nous verrons que ces plans sont isolés et, d'une façon plus précise, il y a un seul plan singulier. Il suffit alors de connaître les caractéristiques du massif sur le talus et de part et d'autre des plans singuliers pour qu'un calcul par différences finies donne la solution désirée du problème. Dans ces conditions, il n'y a aucune raison pour qu'on obtienne le long du mur une réaction inclinée de l'angle φ sur la normale. Donc cette condition physique imposée peut être considérée comme surabondante, à moins d'infirmer le principe de l'état ébouleux. Or le glissement le long du mur semble être une condition essentielle au moment de la rupture. Nous pouvons donc affirmer que c'est le principe de l'état ébouleux partout réalisé qui est en défaut.

Au premier abord, ce résultat rendrait impossible toute tentative de résolution théorique du problème. En fait, la méthode de Boussinesq en donne des solutions approchées. Tout en utilisant le principe de l'état ébouleux partout réalisé, Boussinesq introduit différents angles de frottement Φ, φ, qui permettent en somme de se rendre compte de

(1) M. Caquot : *Équilibre des massifs à frottement interne* (Gauthier-Villars, 1934).

l'état plus ou moins proche de l'éboulement atteint par chaque point. L'introduction des massifs hétérogènes ou ce qui revient au même d'un degré du liberté supplémentaire aux équations (14), permet de tenir compte de la condition physique du glissement contre le mur.

C'est pour ces raisons que la méthode de Boussinesq nous a paru la plus intéressante. Non seulement elle est l'interprétation directe de l'état du massif au moment du renversement du mur, mais, du fait qu'elle donne des limites supérieures et inférieures des coefficients de poussée, elle permet d'avoir un « encadrement » de la réalité. Il nous a donc semblé intéressant de poursuivre l'étude des massifs pulvérulents dans la voie tracée par Boussinesq.

CHAPITRE III

SOMMAIRE. — Aperçu des résultats trouvés par Boussinesq et par M. Callandreau. — Point de départ du présent travail.

Nous avons déjà fait remarquer que, au voisinage de la surface libre, le massif se comporte comme s'il était indifini et alors les formules (15) et (16) y traduisent effectivement l'équilibre. Boussinesq a montré que, si on appelle χ' la dérivée de χ par rapport à θ, cette dérivée est nulle depuis la surface libre jusqu'à une inclinaison critique d'azimut θ_0 où la solution Rankine-Lévy est applicable. Dans le coin exceptionnel compris entre le mur et le plan θ_0 il y a lieu d'introduire des termes correctifs à cette solution. Ces termes qu'il a pris linéraires par rapport à l'écart $(\theta - \theta_0)$ permettent de déterminer l'angle critique θ_0 qui est alors défini par l'équation :

$$\sin(\varphi + 2i - 2\omega - 2\theta_0) = \sin\varphi$$

qui a deux solutions mais dont la seule acceptable est :

$$\theta_0 = (i - \omega).$$

Le plan critique est donc le plan Maurice Lévy lui-même. C'est un plan *singulier* qui ne peut être trouvé par continuité. Si χ et p sont continus sur ce plan, ce qui est d'ailleurs une condition physiquement obligatoire, il n'en est pas de même de leurs dérivées d'ordre quelconque. Ce fait infirme les méthodes de recherche par calculs aux différences finies à partir de la surface libre, ces calculs étant basés sur la continuité des fonctions χ et p et de leurs dérivées ou d'autres fonctions similaires caractéristiques du massif.

Supposons que le mur ait une inclinaison supérieure à celle du plan Maurice Lévy. Le coin exceptionnel où il y aurait lieu d'introduire des termes correctifs à la solution Rankine n'existe pas. Le gros du mas-

sif où χ est constant s'étend jusqu'au mur. La couche contiguë au mur est alors préservée d'un éboulement immédiat et fera corps avec lui s'il commence à s'ébranler. La rupture se fera alors dans le massif lui-même. L'équilibre de la masse est identique à celle du massif indéfini et le calcul de la poussée se fera à l'aide des formules (15) et (16). Le problème est alors résolu et les chiffres de Résal sont exacts.

Ce ne sera donc que dans le cas, le seul usuel, où l'inclinaison du mur est inférieure à celle du mur idéal Maurice Lévy et dans le seul coin compris entre ce mur et la paroi, qu'il y a lieu d'étudier les variations de χ et p ou P.

Désignons d'une façon plus précise par χ, p et P les valeurs de ces variables, en un point donné, fournies par les équations (15) et (16) et χ', p' et P′ leurs valeurs effectives dans le coin exceptionnel. Comme Boussinesq ne cherchait pour χ', p' et P′ que des valeurs voisines de χ, p et P, il a posé :

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + \Pi r A(\theta_0 - \theta), \\ \chi' &= \chi - \frac{c}{2}(\theta_0 - \theta), \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

en notant que p' est proportionnel à r. Le coefficient 2 dans χ' est intéressant du fait qu'on a $c = 1$ lorsque la paroi est confondue avec le plan Lévy. A et C sont des constantes convenablement choisies.

L'ensemble des conditions d'équilibre-limite dans le coin exceptionnel, de glissement de la masse sablonneuse contre le mur, jointes aux équations indéfinies de l'équilibre permet de calculer A et c.

Les équations (14) d'équilibre doivent être identiquement vérifiées si on y remplace P et χ par P′ et χ'. Comme les dérivées $\frac{dP'}{d\theta}$ et $\frac{d\chi'}{d\theta}$ y entrent au premier degré, ces équations sont aussi vérifiées par les différences (P′ — P) et (χ' — χ). En passant à la limite $\theta = \theta_0$, on trouve les deux équations

$$\left.\begin{aligned} \Pi A \sin 2(\chi - \theta_0) + Pc \cos 2(\chi - \theta_0) &= 0, \\ -\Pi A \sin 2(\chi - \theta_0) + Pc \sin \varphi &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

système de deux équations linéaires et homogènes en A et c. Leur déterminant principal est nul, sinon on retomberait sur la solution Rankine-Lévy que nous avions écartée :

$$\cos 2(\chi - \theta_0) - \sin \varphi = 0,$$

qui redonne $\theta_0 = -\omega + i$. C'est une identité. En remplaçant χ et θ_0 par leurs valeurs, la première équation (21) donne :

$$\Pi A - Pc \frac{\cos 2(\chi - \theta_0)}{\sin 2(\chi - \theta_0)} = -Pc \operatorname{tg} \varphi,$$

soit

$$A = c \frac{\sin \omega \cos (\omega - i)}{\cos \varphi \sin 2\chi}. \qquad (22)$$

Il reste la condition de glissement contre le mur. Si $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{N}$ sont les composantes tangentielle et normale élémentaire sur le mur, on a

$$\frac{\mathfrak{T}}{-\mathfrak{N}} = \operatorname{tg} \varphi. \tag{23}$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{N}$ sont fournies par les expressions (4) où l'on tiendra compte des relations (9) entre les pressions principales et les efforts mais en notant que N_1, N_2, T_3 deviennent :

$$\left.\begin{aligned} N'_1 &= -p'(1 - \sin\varphi \cos 2\chi'), \\ N'_2 &= -p'(1 - \sin\varphi \cos 2\chi'), \\ T'_3 &= -p' \sin\varphi \sin 2\chi'. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Supposons d'abord l'écart maximum $(\theta_0 - \theta)$ entre le mur et le plan Maurice Lévy faible pour qu'on puisse remplacer N'_1, N'_2 et T'_3 par leurs développements jusqu'aux termes du premier ordre en la différence $(\theta_0 - \theta)$. Désignons par n_1, n_2 et t_3 respectivement les trois différences $(N_1 - N_1) - (N'_2 - N_2)$ et $(T'_3 - T_3)$. On obtient facilement :

$$(n_1, n_2, t_3) = \frac{2c\Pi \sin\omega \cos\theta_0}{\cos\varphi \sin\chi} (\cos^2\theta_0, \sin^2\theta_0, \cos\theta_0 \sin\theta_0)\, r \sin 2(\theta - \theta_0).$$

En remplaçant $(\theta - \theta_0)$ par $\sin(\theta - \theta_0)$. Or :

$$r \sin(\theta - \theta_0) = y \cos\theta_0 - x \sin\theta_0,$$

d'où :

$$(n_1, n_2, t_3) = \frac{2c\Pi \sin\omega \cos\theta_0}{\cos\varphi \sin 2\chi} (\cos^2\theta_0, \sin^2\theta_0, \cos\theta_0 \sin\theta_0)(y \cos\theta_0 - x \sin\theta_0) \tag{25}$$

Formules très suggestives puisqu'elles vérifient intuitivement et, *quelque notable que puisse être la différence* $(\theta_0 - \theta)$, les conditions d'équilibre :

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial t_3}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial t_3}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} = 0.$$

On peut alors disposer du facteur constant c pour avoir frottement contre le mur. Utilisons les formules classiques :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}' &= \frac{N'_2 - N'_1}{2} \sin 2\theta + T'_3 \cos 2\theta \\ (-\mathfrak{N}') &= -\frac{N'_2 + N'_1}{2} - \frac{N'_2 - N'_1}{2} \cos 2\theta + T'_3 \sin 2\theta. \end{aligned}\right\}$$

En remplaçant N'_1, N'_2 et T'_3 par leurs valeurs $N_1 + n_1$, $N_2 + n_2$, $T_3 + t_3$ et sans développer les termes contenant $(\theta_0 - \theta)$ en séries limitées, il vient :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= p \sin\varphi \left[\cos(\varphi + 2\theta_0 - 2\theta) + c \frac{\sin(\theta_0 - \theta)\cos\theta_0}{\cos\varphi \cos\theta} \sin(2\theta_0 - 2\theta)\right] \\ -\mathfrak{N} &= p \sin\varphi \left[\frac{1}{\sin\varphi} - \sin(\varphi + 2\theta_0 - 2\theta)\right] \\ &\quad - c \frac{\sin(\theta_0 - \theta)\cos\theta_0}{\cos\varphi \cos\theta} [1 - \cos(2\theta_0 - 2\theta)]. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

La substitution de ces valeurs dans la relation (23) donne après un calcul assez simple :

$$c = \frac{\cos\varphi \cos\theta}{\cos\theta_0 \cos(\varphi - \theta_0 + \theta)}.$$

Cette écriture n'étant valable que contre le mur, c'est-à-dire pour $\theta = \theta_0 - \delta$ où δ représente la différence $(i - i')$ des inclinaisons du plan Maurice Lévy avec celle du mur, on a :

$$c = \frac{\cos\varphi \cos(\theta_0 - \delta)}{\cos\theta_0 \cos(\varphi - \delta)}. \qquad (27)$$

Mais nous avions remplacé dans les relations (24) N'_1, N'_2 et T'_3 par des développements limités en $(\theta_0 - \theta)$ qui ont donné $N_1 + n_1$, $N_2 - n_2$, et $T_3 + t_3$. Ces développements ne sont pas rigoureusement égaux aux expressions (24) qui, elles, imposent en chaque point du massif, à la pression la plus oblique s'exerçant sur un élément plan en ce point, de faire avec la normale correspondante un angle égal à φ. Ce fait n'a plus lieu exactement avec les nouvelles expressions de N'_1, N'_2, T_3 et, si l'on appelle φ' l'angle correspondant, on a :

$$\sin^2\varphi' = \frac{(N'_2 - N'_1)^2 + 4T'^2_3}{(N'_2 + N'_1)^2} \qquad (28)$$

relation qui s'écrit :

$$\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi} = 1 + \left[\frac{\cos\varphi \sin(\theta_0 - \theta)\cos(\theta_0 - \delta)}{\cos(\varphi - \delta)\cos\theta - \sin\varphi \sin(\theta_0 - \theta)\cos(\theta_0 - \delta)}\right]^2.$$

La fraction du second membre, fonction de θ, est facile à étudier Elle croît lorsque $(\theta_0 - \theta)$ croît et est égale à 0 pour $\theta = \theta_0$ auquel cas $\varphi' = \varphi$. Elle atteint son maximum avec $(\theta_0 - \theta)$ soit pour $\theta_0 - \theta = \delta$ contre le mur. Alors φ' prend sa valeur maximum Φ :

$$\frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\delta} = 1 + \frac{\delta^2}{2} + \ldots \qquad (29)$$

Ceci montre que, au degré d'approximation poursuivi, comme nous avons supposé l'écart δ suffisamment faible pour qu'on puisse négliger tout terme en δ^2, on a l'égalité de l'angle φ' et de son maximum Φ à l'angle φ de terre coulante. L'état d'équilibre obtenu n'est donc autre que l'état d'équilibre-limite de la masse homogène considérée.

Supposons maintenant δ quelconque. Les formules précédentes donnent l'équilibre-limite d'une masse pulvérulente hétérogène qui aurait, le long de chaque couche d'inclinaison θ, un angle de frottement intérieur égal à l'angle variable φ'. La paroi du mur est supposée telle que l'angle de frottement extérieur reste égal à φ inférieur à Φ. Alors ces diverses couches hétérogènes ont une moindre tendance à s'ébouler que les couches correspondantes de la masse sablonneuse homogène. La poussée calculée de cette façon est plus faible que celle exercée réellement par la masse homogène.

Mais soit alors le même massif caractérisé par le maximum Φ égal

à l'angle de terre coulante effectif. L'angle φ de nos formules est défini par son sinus égal à $\sin\Phi \cos\delta$. Le massif considéré aura alors des angles de frottement intérieur et extérieur inférieurs à ceux de la masse pulvérulente homogène. Ses couches tendent à s'ébouler plus facilement; cela revient à dire que la poussée exercée par le massif hétérogène ainsi constitué et calculée avec nos formules, est plus forte que celle exercée par le massif réel homogène.

De cette façon Boussinesq a montré qu'on peut avoir une valeur par excès et une par défaut de la poussée. Mais dès les premiers calculs effectués il a constaté que ces valeurs, où plutôt celles de la composante normale, sont assez écartées. D'ailleurs, on peut facilement concevoir que c'est la valeur par excès qui est probablement la plus éloignée de la réalité. En effet, pour la calculer, il a fallu diminuer l'angle de frottement de tout le massif au moment où, pour la valeur par défaut, on a augmenté la résistance du seul coin exceptionnel compris entre la paroi et le plan Maurice Lévy.

Si d'une façon particulière on appelle φ_1 l'angle de frottement extérieur du massif contre le mur, Boussinesq a pensé qu'il serait plus intéressant, dans l'évaluation par excès de faire $\varphi_1 = \Phi$. Ceci diminue évidemment la valeur par excès. Dans ces conditions les évaluations par excès et par défaut de la poussée sont effectuées toutes les deux dans des hypothèses n'altérant pas la direction effective de cette poussée et sont alors mieux comparables. La valeur de c n'est plus donnée par l'équation (27). Elle est facilement calculable.

Bien plus, cette manière de voir donnant toujours des valeurs trop grandes dans l'évaluation par excès de la poussée et, même plus grandes, quant à la composante normale, que la première évaluation par excès, Boussinesq a cherché une limite supérieure de cette même composante normale encore plus basse.

Laissons φ_1 indéterminé et, évidemment, inférieur à Φ et introduisons l'angle auxiliaire ε défini par :

$$\frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varepsilon}. \tag{30}$$

La relation (28) donne alors :

$$c = \frac{\cos\varphi \cos(\theta_0 - \delta) \sin\varepsilon}{\cos(\varphi - \varepsilon) \cos\theta_0 \sin\delta}.$$

La composante normale $\mathfrak{N}$ de la poussée vaut alors, en remplaçant p par sa valeur (16) et en introduisant $i' = i - \delta$.

$$\mathfrak{N} = \frac{\Pi r \cos(\varphi + i' + \delta) \cos(\omega - i') \cos\varepsilon}{\cos(\omega - i' - \delta) \cos(\varphi - \varepsilon)} [1 - \sin\Phi \sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)].$$

L'angle φ_1 est défini par ($\varphi_1 < \Phi$) :

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \sin\varphi \frac{\cos(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}{\cos\varepsilon - \sin\varphi \sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)}. \tag{31}$$

On aura ainsi la valeur supérieure la plus faible de $\mathfrak{M}$ que nous désignerons par P_m :

$$\left.\begin{aligned} &P_m = k'\Pi r, \\ &k' = \frac{\cos(\varphi + i' + \delta)\cos(\omega - i')\cos\varepsilon}{\cos(\omega - i' - \delta)\cos(\varphi - \varepsilon)}\,[1 - \sin\Phi\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)], \\ &\text{avec} \qquad \cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi} \\ &\text{et} \\ &\delta = -i' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \omega + \chi = -i' + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi} - \omega\right), \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

φ étant déterminé par la condition $\frac{\partial k'}{\partial \varphi} = 0$. Nous montrerons que k' passe par un minimum.

(Nous rappelons la signification des angles i, i' et ω dans la figure ci-jointe, où ils sont positifs.)

On a, de suite, de la même façon l'expression de la limite inférieure par défaut P_i correspondante, avec la valeur (27) de c :

$$\left.\begin{aligned} &P_i = k_0\Pi r, \\ &\text{avec} \\ &k_0 = \frac{\cos\varphi\cos(\varphi + i' + \delta)\cos(\omega - i')\cos(\varphi + \delta)}{\cos(\omega - i' - \delta)\cos(\varphi - \delta)}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

La première limite supérieure que nous avions envisagée est :

$$P_s = k_s\Pi r, \qquad (33\ bis)$$

où k_s est donné par une expression analogue à celle de k_0 mais où

$$\sin\varphi = \sin\Phi\cos\delta,$$

δ étant une fonction de φ donné par (32).

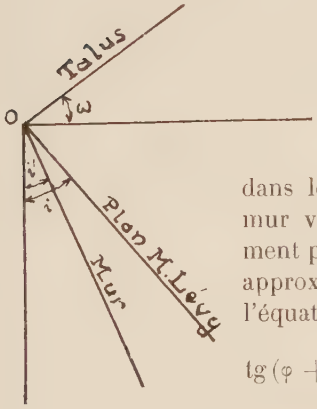

Fig. 6.

Boussinesq s'est borné à l'étude de k' dans le seul cas d'un talus horizontal avec un mur vertical $\omega = i' = 0$. k' passe effectivement par un minimum et il a donné une valeur approximative de l'angle φ correspondant par l'équation :

$$\operatorname{tg}(\varphi + 2') = \frac{\operatorname{tg}\Phi}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Phi}{2}\right)}}}. \quad (34)$$

L'application de cette formule est très limitée.

M. Callandreau (1), laissant toujours le mur vertical, $i' = 0$, a fait

(1) M. Callandreau *Thèse du doctorat* (Gauthier-Villars, mars 1931).

varier $\omega > 0$ et il a proposé comme valeur approximative de φ correspondant au minimum dont il a montré l'existence :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\operatorname{tg}\Phi}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\Phi}\times\frac{1}{8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Phi}{2}\right)}\left[1+0{,}018\times 40\left(\frac{\omega}{\Phi}-\frac{1}{40}\right)\left(\frac{\omega}{\Phi}-1\right)\right]}} \\ \text{où} \\ \sin\psi &= \frac{\sin(\Phi-\omega)\sqrt{\sin^2\Phi-\sin^2\omega}}{\sin\Phi\cos^2\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Nous nous proposons dans le prochain chapitre d'étudier k' en faisant varier ω et i' et principalement pour les valeurs positives de i' seules intéressantes en pratique.

CHAPITRE IV

Sommaire. — Étude de la limite par excès. — Minimum unique et sa recherche pratique. — Formule approchée pour φ.

Introduisons les paramètres de M. Callandreau et posons :

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega' &= \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, & \omega' &= \operatorname{arc}\sin\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \\ \lambda &= \sin\varphi\cos\omega', & \mu &= \sin\varepsilon\sin\Phi. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Alors, on a :

$$\delta = i' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(\omega' - \omega)$$

$$\sin\varepsilon = \frac{\mu}{\sin\Phi}, \quad \cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}, \quad \sin\omega' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}, \quad \cos\omega' = \frac{\lambda}{\sin\varphi}.$$

Les paramètres λ et μ peuvent se mettre sous la forme :

$$\lambda = +\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\omega} = +\sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)};$$

$$\mu = +\sqrt{\sin^2\Phi - \sin^2\varphi} = +\sqrt{\sin(\Phi+\varphi)\sin(\Phi-\varphi)}.$$

On reconnaît aisément leurs lois de variation. On a aussi :

$$(\cos\omega + \lambda)(\cos\omega - \lambda) = \cos^2\varphi; \qquad (\cos\varphi + \mu)(\cos\varphi - \mu) = \cos^2\Phi.$$

Les quatre facteurs $(\cos\omega + \lambda)$, $(\cos\omega - \lambda)$, $(\cos\varphi + \mu)$, $(\cos\varphi - \mu)$ sont positifs toujours.

Rappelons que, dans cette étude, i' est toujours inférieur à i. Nous nous bornerons au cas seul intéressant en pratique où i' est positif. Donc :

$$0 < i' < i.$$

Nous donnerons quelques indications au cas où i' est négatif.

Reprenons donc l'équation (32) à étudier où ε et δ sont fonctions de φ.

Nous déduisons facilement :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi + i' + \delta &= \varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(\omega' - \omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \\
\omega - i' - \delta &= \omega - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}(\omega' - \omega) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} + \frac{\omega' + \omega}{2} \\
\varphi - \varepsilon + 2\delta &= \varphi + \frac{\pi}{2} - 2i' - \varphi - (\omega' - \omega) - \varepsilon = \frac{\pi}{2} - (\omega' - \omega) - \varepsilon - 2i'
\end{aligned}\right\}$$

D'où l'on déduit :

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta) &= \cos[\omega' - \omega + \varepsilon + 2i'] \\
\cos(\varphi + i' + \delta) &= \sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \omega' + \omega}{2}\right] \\
\cos(\omega - i' + \delta) &= \cos\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' + \omega}{2}\right]
\end{aligned}\right\}$$

Alors k' peut s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}
k' = \cos(\omega - i') \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \omega' + \omega}{2}\right]}{\cos\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' + \omega}{2}\right]} \\
\times \frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varphi - \varepsilon)} [1 - \sin\Phi \cos(\omega' - \omega + \varepsilon + 2i')]
\end{aligned}\right\} \quad (37$$

Introduisons les paramètres λ et μ définis précédemment. Nous pouvons alors écrire :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \omega' + \omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi - \omega' + \omega)\right]}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin(\varphi - \omega' + \omega)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' + \omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi + \omega' + \omega)\right]}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin(\varphi + \omega' + \omega)}{2}}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \omega' + \omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' + \omega}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1 - \sin(\varphi - \omega' + \omega)}{1 + \sin(\varphi + \omega' + \omega)}}.$$

En développant les sinus, on a, tous calculs faits :

$$\left.\begin{aligned} 1 - \sin(\varphi - \omega' + \omega) &= \frac{1}{\sin\varphi}(\cos\omega - \lambda)\sin(\omega + \varphi) \\ 1 + \sin(\varphi + \omega' + \omega) &= \frac{1}{\sin\varphi}(\cos\omega + \lambda)\sin(\varphi + \omega) \end{aligned}\right\}$$

D'où

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \omega' + \omega}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' + \omega}{2}\right)} = \sqrt{\frac{(\cos\omega - \lambda)}{(\cos\omega + \lambda)}} = \frac{(\cos\omega - \lambda)}{\cos\varphi}$$

car

$$(\cos\omega + \lambda)(\cos\omega - \lambda) = \cos^2\varphi.$$

Quant au crochet de k', on a, en développant :

$$\left.\begin{aligned} \cos(\omega' - \omega + \varepsilon + 2i') &= \frac{\cos(\omega - 2i')}{\sin\varphi\sin\Phi}[\lambda\sin\varphi - \mu\sin\omega] \\ &+ \frac{\sin(\omega - 2i')}{\sin\varphi\sin\Phi}[\sin\omega\sin\varphi + \lambda\mu] \end{aligned}\right\}$$

et après simplifications et calculs assez longs :

$$\left.\begin{aligned} &[1 - \sin\Phi\cos(\omega' - \omega + \varepsilon + 2i')] \\ &= \frac{1}{\sin\varphi}\{(\cos\omega - \lambda)[\sin\varphi\cos(\omega - 2i') + \mu\sin(\omega - 2i')] + 2\sin i'[\mu\cos i' + \sin\varphi\sin i']\}. \end{aligned}\right\} (39)$$

Dans l'expression (37) de k' tenons compte des résultats (38) et (39) et, remarquant qu'on a aussi :

$$\frac{\cos\varepsilon}{\cos(\varphi - \varepsilon)} = \frac{1}{\cos\varphi + \mu}.$$

Il vient :

$$\left.\begin{aligned} k' &= \frac{\cos(\omega - i')(\cos\omega - \lambda)^2(\cos\varphi - \mu)}{\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\Phi}[\sin\varphi\cos(\omega - 2i') + \mu\sin(\omega - 2i')] \\ &+ \frac{\cos(\omega - i')}{\cos^2\Phi} \times \frac{(\cos\omega - \lambda)}{\sin\varphi\cos\varphi}(\cos\varphi - \mu) \times 2\sin i'[\mu\cos i' + \sin\varphi\sin i']. \end{aligned}\right\} (40)$$

k' est donc composé de deux termes k'_0 et k'_1 :

$$k' = k'_0 + k'_1,$$

forme sous laquelle il est plus simple d'obtenir la dérivée $\frac{dk'}{d\varphi}$ que nous cherchons.

On a, tous calculs faits :

$$\frac{dk'_0}{d\varphi} = \frac{\cos(\omega - i')}{\cos^2\Phi} \times \frac{(\cos\omega - \lambda)^2}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \times \frac{(\cos\varphi - \mu)}{\lambda\mu}\left[\begin{aligned} &-\mu(2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda)\{\mu\sin(\omega - 2i') + \sin\varphi\cos(\omega - 2i')\} \\ &+\lambda\sin\varphi\cos\varphi\{\mu\cos(\varphi - \omega + 2i') + \sin\varphi\sin(\varphi - \omega + 2i')\} \end{aligned}\right]$$

et

$$\frac{dk'_1}{d\varphi} = \frac{\cos(\omega - i')}{\cos^2\varphi} \times \frac{(\cos\omega - \lambda)}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \times \frac{(\cos\varphi - \mu)}{\lambda\mu} 2\sin i'\left[\begin{aligned} &\mu(\sin\varphi\sin i' + \mu\cos i')\{-\cos\omega + \cos^2\varphi(\cos\omega - \lambda)\} \\ &+\lambda\sin\varphi\cos\varphi\{\mu\sin(\varphi + i') - \sin\varphi\cos(\varphi + i')\} \end{aligned}\right]$$

Ces calculs ont été conduits de façon à mettre en évidence $(\cos\omega - \lambda)$ et $(\cos\varphi - \mu)$.

Par suite, on peut écrire :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dk'}{d\varphi} = \frac{\cos(\omega - i')}{\cos^2\Phi} \times \frac{(\cos\omega - \lambda)}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \times \frac{(\cos\varphi - \mu)}{\lambda\mu} \cdot \xi, \\
&\text{où} \\
&\xi = \mu^2\{(\cos\omega - \lambda)\sin(\omega - 2i')[2\sin^2\varphi + \lambda] - \sin 2i'(\lambda\cos^2\varphi + \cos\omega\sin^2\varphi)\} \\
&+ \mu\sin^2\varphi \left\{\begin{array}{l}(\cos\omega - \lambda)[2\cos(\omega - 2i')\cos\omega\sin\varphi + \lambda\sin(\varphi - \omega + 2i') \\ -2\sin i'[\cos\omega\cos(\varphi + i') - \cos\varphi\cos i'(\cos\omega - \lambda)]\end{array}\right\} \\
&- \lambda\sin^2\varphi\cos\varphi\,[(\cos\omega - \lambda)\sin(\varphi - \omega + 2i') - 2\sin i'\cos(\varphi + i')],
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

où ξ égalé à zéro, constitue une équation du second degré en μ susceptible de définir l'angle φ convenable correspondant au minimum de k'. Lorsqu'il est nul on retombe sur une forme de ξ déjà étudiée par M. Callandreau.

Mais ce trinôme en μ peut être mis sous une forme plus explicite et plus simple.

Le crochet du terme indépendant de μ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\sin 2i'[\sin\omega\sin(\varphi - \omega) - \lambda\cos(\varphi - \omega)] \\
&- \cos 2i'[\sin\omega\cos(\varphi - \omega) + \lambda\sin(\varphi - \omega)] + \sin\varphi,
\end{aligned}$$

soit :

$$-P\sin 2i' - Q\cos 2i' + R,$$

où P, Q, R sont toujours positifs. En effet Q et R sont visiblement positifs et, quant à $-P$, coefficient de $\sin 2i'$, il a le même signe que le produit :

$$[\sin\omega\sin(\varphi - \omega) + \lambda\cos(\varphi - \omega)][\sin\omega\sin(\varphi - \omega) - \lambda\cos(\varphi - \omega)]$$

qui, développé vaut :

$$\begin{aligned}
&\sin^2(\varphi - \omega)\sin^2\omega - \lambda^2\cos^2(\varphi - \omega) = \sin^2\omega - \sin^2\varphi\cos^2(\varphi - \omega) \\
&= -\cos\varphi\sin(\varphi - \omega)[\sin\omega - \sin\varphi\cos(\varphi - \omega)].
\end{aligned}$$

On voit alors que P est toujours positif.

Remplaçons d'autre part $\cos 2i'$ et $\sin 2i'$ en fonction de $\cos i'$ et $\sin i'$. Le crochet du terme indépendant de μ devient :

$$(Q + R)\sin^2 i' - 2P\sin i'\cos i' + (R - Q)\cos^2 i',$$

dont le discriminant est :

$$\begin{aligned}
P^2 - (Q + R)(R - Q) = P^2 + Q^2 - R^2 &= [\sin\omega\sin(\varphi - \omega) - \lambda\cos(\varphi - \omega)]^2 \\
&+ [\sin\omega\cos(\varphi - \omega) + \lambda\sin(\varphi - \omega)]^2 - \sin^2\varphi.
\end{aligned}$$

Le discriminant est identiquement nul. Il est aisé de s'en rendre compte. Par suite le crochet du terme indépendant de μ peut être mis sous la forme d'un carré, soit :

$$\left\{\begin{aligned}
&(Q + R)\left[\sin i' - \frac{P\cos i'}{Q + R}\right]^2 = (R - Q)\left[\frac{P}{R - Q}\sin i' - \cos i'\right]^2 \\
&= (\cos\omega - \lambda)\sin(\varphi - \omega)\left[\frac{\lambda\cos(\varphi - \omega) + \sin\omega\sin(\varphi - \omega)}{(\cos\omega - \lambda)\sin(\varphi - \omega)}\sin i' + \cos i'\right]^2.
\end{aligned}\right.$$

Cet ensemble peut se mettre sous une forme encore plus simple. En effet étudions le crochet :

$$\cos i' + \sin i' \frac{\sin \omega \sin (\varphi - \omega) - \lambda \cos (\varphi - \omega)}{(\cos \omega - \lambda) \sin (\varphi - \omega)},$$

ou plutôt la quantité :

$$1 - \operatorname{tg} i' \frac{\lambda \cos (\varphi - \omega) - \sin \omega \sin (\varphi - \omega)}{(\cos \omega - \lambda) \sin (\varphi - \omega)}.$$

On a vu déjà que :

$$[\lambda \cos (\varphi - \omega) - \sin \omega \sin (\varphi - \omega)]$$

est toujours positif.

Par conséquent, l'expression (42) décroît à partir de 1 quand i' croît de 0. Comme i' est compris entre 0 et i, lorsque i' atteint i cette expression atteint son minimum. Je dis que cette valeur minimum est nulle. En effet, on a :

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \omega' - \omega}{2}\right) = \frac{1 - \sin(\varphi + \omega' - \omega)}{\cos (\varphi + \omega' - \omega)} = \frac{\sin (\varphi - \omega)(\cos \omega - \lambda)}{\lambda \cos(\varphi - \omega) - \sin \omega \sin(\varphi - \omega)}.$$

C'est exactement la valeur qu'on obtiendrait pour $\operatorname{tg} i'$ en annulant l'expression (42).

Le crochet du terme indépendant de μ peut alors s'écrire :

Crochet du terme indépendant de μ $= (\cos \omega - \lambda) \sin (\varphi - \omega) \times \cos^2 i' \left[1 - \frac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i}\right]^2.$ (43)

Le terme est $\mu \sin^2 \varphi$, de l'expression (41) de ξ, s'écrit, de son côté :

$$\lambda \sin (\varphi - \omega - 2i')(\cos \omega - \lambda) - 2\lambda \sin i' \cos (\varphi + i')$$
$$+ 2\{\lambda \sin i' \cos(\varphi + i') - \sin i'[\cos \omega \cos(\varphi + i') - \cos \varphi \cos i' (\cos \omega - \lambda)]$$
$$+ (\cos \omega - \lambda) \cos (\omega - 2i') \cos \omega \sin \varphi\},$$

ou en simplifiant :

$$\lambda \sin (\varphi - \omega - 2i')(\cos \omega - \lambda) - 2\lambda \sin i' \cos(\varphi - i') + 2 \sin \varphi \cos^2 (\omega - i')(\cos \omega - \lambda).$$

et, en se servant du résultat relatif au terme de ξ indépendant de μ

$$\lambda \sin (\varphi - \omega)(\cos \omega - \lambda) \left[1 - \frac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i}\right]^2 \times \cos^2 i' + 2(\cos \omega - \lambda) \sin \varphi \cos^2 (\omega - i'). \quad (44)$$

Enfin le terme en μ^2 est toujours positif. Le paramètre i' varie, en effet, entre 0 et i, bien déterminée, dès que l'on connaît le couple des valeurs (ω, φ), comme il résulte de l'égalité :

$$i = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right).$$

Or pour $i' = 0$, ce terme prend la valeur toujours positive :

$$\sin \omega (2 \sin^2 \varphi \cos \omega + \lambda),$$

nulle seulement dans le cas où ω est égal à zéro. De plus la substitution de i à i' dans ce terme donne, après un long calcul, un résultat de substitution dont le signe est celui de :

$$\cos 2i \times (\cos \omega - \lambda) \cos \varphi \sin^3 \varphi \sin(\varphi + \omega).$$

Comme $\cos 2i$ est toujours positif, on voit que le terme en μ^2 est positif pour $i' = i$ quels que soient ω et φ.

Ainsi les substitutions des deux valeurs extrêmes 0 et i, donnant pour la fonction, évidemment continue et finie, constituant le coefficient de μ^2, des résultats positifs, donc de même signe, cette fonction de i' ne pourra s'annuler qu'un nombre pair de fois dans cet intervalle $(0, i)$.

Mais le terme en μ^2 égalé à 0 donne :

$$(\cos\omega - (2\lambda(\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda)\sin(\omega - 2i') + \sin 2i'[\lambda\cos^2\varphi + \cos\omega\sin^2\varphi] = 0,$$

ou

$$\sin 2i'\,[\cos\omega\sin^2\varphi + \lambda\cos^2\varphi - \cos\omega(\cos\omega - \lambda)(2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda)]$$
$$+ \sin\omega\cos 2i'\,(\cos\omega - \lambda)(2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda) = 0,$$

ou sous forme abrégée :

$$\cos 2i'\,\{\operatorname{tg} 2i'\,X + Y\} = 0,$$

avec X et Y représentant les coefficients de $\sin 2i'$ et $\cos 2i'$ de l'équation précédente. Or, $\cos 2i'$ est toujours positif et, par suite, le terme en question ne pourra s'annuler que pour la *seule* valeur de i', correspondant à *l'unique* racine dans l'intervalle considéré de l'équation :

$$\operatorname{tg} 2i' \times X + Y = 0.$$

Dès lors, comme nous avons vu qu'il devrait y avoir un nombre pair de ces racines, nous arrivons à la conclusion, qu'en fait, il y a zéro. Le coefficient du terme en μ^2 est donc bien toujours positif.

L'équation (41) peut alors s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dk'}{d\varphi} = -\frac{\cos(\omega - i')}{\cos^2\Phi} \times \frac{(\cos\omega - \lambda)^2}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \times \frac{(\cos\varphi - \mu)}{\lambda\mu} \times \xi,\\
&\text{avec}\\
&\xi = \mu^2\left\{\sin(\omega - 2i')[2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda] + \sin 2i'\left[-\cos^2\varphi + \frac{\cos\omega}{\cos\omega - \lambda}\right]\right\}\\
&\qquad + \mu\sin^3\varphi\cos^2(\omega - i')\,[2 + \sin\tau\sin\psi]\\
&\qquad - \sin^3\varphi\cos\varphi\cos^2(\omega - i')\sin\tau\sin\psi.
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

En remarquant que les quatre quantités : $\dfrac{\lambda}{\cos\omega}$, $\dfrac{\sin(\varphi - \omega)}{\sin\varphi\cos\omega}$, $\dfrac{\cos^2\omega\cos^2 i'}{\cos^2(\omega - i')}$ et $\left(1 - \dfrac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i}\right)^2$ sont positifs et inférieurs à l'unité, nous avons posé :

$$\left.\begin{aligned}
&\sin\psi = \frac{\lambda\sin(\varphi - \omega)}{\cos^2\omega\sin\varphi}\\
&\text{et}\\
&\sin\tau = \frac{\cos^2\omega\cos^2 i'}{\cos^2(\omega - i')}\left[1 - \frac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i}\right]^2,
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

où ψ et τ désignent deux angles positifs et aigus. Les fonctions $\sin\psi$ et $\sin\tau$ et, par suite, les angles ψ et τ eux-mêmes sont ainsi définis sans

ambiguïté et, à chaque valeur de φ dans le champ du problème, correspondra une et une seule série de valeurs du couple (ψ, τ).

La fonction $\sin\psi$ varie du reste d'une manière continue dans le même sens que φ et dans un sens contraire à ω, ainsi qu'il résulte des deux écritures :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sin\psi}{\partial\varphi} &= \frac{\cos\varphi \sin^2\varphi \sin(\varphi - \omega) + \lambda^2 \sin\omega}{\lambda \sin^2\varphi \cos\omega} > 0. \\ \frac{\partial \sin\psi}{\partial\omega} &= \frac{-[\sin\omega \sin(\varphi - \omega)\cos^2\varphi + \lambda^2 \cos\varphi]}{\lambda \sin\varphi \cos^3\omega} < 0; \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Quant à $\sin\tau$, cette fonction décroît constamment lorsque ω ou i' croît comme il est facile de le voir en dérivant $\sin\tau$ par rapport à ω ou i' et en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial\omega} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\omega} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{2\lambda}(\cos\omega - \lambda), \end{aligned}$$

on sait déjà que $(\cos\omega - \lambda)$ est toujours positif.

Au contraire, lorsque φ varie, $\sin\tau$ n'a pas toujours le même sens de variation. Cependant, $\sin\tau$ croît ou décroît en même temps que $\operatorname{tg} i$ ou, ce qui revient au même, l'angle i :

$$i = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}(\omega' - \omega),$$

$$\frac{\partial i}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega'}{\partial\varphi}$$

ou, après calculs :

$$\frac{\partial i}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2\lambda \sin\varphi}[\lambda \sin\varphi - \sin\omega \cos\varphi].$$

Lorsque $\varphi = \omega$, $\lambda = 0$ et i croît avec φ jusqu'au moment où l'on a :

$$\lambda \sin\varphi = \sin\omega \cos\varphi,$$

soit, en élevant au carré :

$$\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\omega) = \sin^2\omega \cos^2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \sin^2\omega$$

et, comme il est légitime de l'écrire :

$$\sin\varphi = +\sqrt{\sin\omega}. \qquad (48)$$

Cette équation a toujours une racine et une seule car φ est aigu.

Donc, si φ croît à partir de ω jusqu'à Φ, i commence par croître à partir de zéro puis décroît après un maximum dont la position est définie par l'équation (48). Considérons l'angle i' par rapport à cette variation de i. Pour $\varphi = \Phi$, i est certainement plus grand que i' sinon on serait dans le gros du massif où la solution Rankine-Lévy est applicable. D'une façon plus générale, une valeur de φ ne peut être envisagée pour le cal-

cul des coefficients de poussée que si la valeur de i correspondante est supérieure à i'. Donc, le champ de variation de φ est plus restreint que l'intertervalle (ω, Φ). Si, partant de $\varphi = \omega$, φ croît, i croissant à partir de zéro, atteint pour $\varphi = \varphi'$ bien défini la valeur i'. φ' est déterminé par la relation :

$$i' = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2}(\omega' - \omega), \tag{49}$$

équation qu'on peut résoudre par la méthode de fausse position et φ' est sa racine la plus petite. Il existe en effet une seconde racine, d'ailleurs toujours supérieure à Φ comme il est facile de le prévoir et qui ne nous intéresse pas.

Alors, φ variant dans l'intervalle $(\varphi' - \Phi)$ deux cas peuvent se présenter :

1° L'équation (48) donne une solution φ'' comprise entre φ' et Φ. Alors le maximum a lieu. i croît de i' puis décroît. Ce cas a lieu lorsque ω est faible. D'ailleurs si $\omega = 0$, on a $\varphi' = \varphi'' = 0$;

2° La solution φ'' est supérieure à Φ, ce qui se produit lorsque ω est suffisamment rapproché de Φ. i croît constamment depuis i' jusqu'à sa valeur pour $\varphi = \Phi$.

Il est facile de voir qu'on ne peut jamais supposer $\varphi'' < \varphi'$.

Quant à $\sin \tau$ nous avions dit que ses variations sont toujours dans le même sens que celles de i.

Reprenons l'expression générale (45) de $\frac{dk'}{d\varphi}$. Nous voyons que cette dérivée sera toujours de signe contraire à celle de ξ. En effet comme ω et i' sont des angles aigus et positifs, $\cos(\omega - i')$ est positif. D'ailleurs, dans le cas général, on a :

$$-\frac{\pi}{2} + \omega < i' < \frac{\pi}{2} + \omega,$$

soit :

$$-\frac{\pi}{2} < (\omega - i') < +\frac{\pi}{2}.$$

Cette expression de ξ se réduit à celle trouvée par M. Callandreau dans sa thèse si on y fait $i' = 0$. Elle est d'ailleurs d'une forme analogue. En y mettant en facteur la quantité toujours positive :

$$\sin \tau \times \frac{\lambda \sin(\varphi - \omega) \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \mu)} \times \frac{\cos^2(\omega - i')}{\cos^2 \omega},$$

nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \xi = \sin \tau \times \frac{\cos^2(\omega - i')}{\cos^2 \omega} \times \frac{\lambda \sin(\varphi - \omega) \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \mu)} \\ \times \left\{ \mu^2 (\cos \varphi + \mu) \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2(\omega - i')} \cdot \frac{p}{\lambda \sin(\varphi - \omega) \sin^2 \varphi \sin \tau} \cdot \frac{2\mu(\cos \varphi + \mu)}{\sin \psi \sin \tau} - \cos^2 \Phi \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

où p représente le coefficient positif μ^2 dans l'expression (45) de ξ.

Sous cette forme nous voyons que pour $\varphi = \varphi'$, $\sin\tau = 0$ et l'accolade est infini positif, cependant que pour $\varphi = \Phi$, $\mu = 0$, $\sin\tau$ est différent de zéro sauf cas particulier où Φ égale à la racine la plus grande de l'équation (49), et l'accolade est égale à $-\cos^2\Phi$. Dans l'intervalle $(\varphi' - \Phi)$, l'accolade, variant évidemment d'une façon continue de l'infini positif à $(-\cos^2\Phi)$ et annule au moins pour une valeur φ de ce même intervalle. La fonction ξ elle-même n'est égale à zéro que lorsque l'accolade est nulle comme il est facile de le voir. Dans le cas où Φ est égale à la plus grande racine de l'équation (49), Φ est alors une racine évidente de l'équation $\xi = 0$.

Ainsi, dans l'intervalle $(\varphi' - \Phi)$ l'équation $\xi = 0$ admet toujours au moins une racine. Pour montrer l'unicité de cette racine il faut étudier les variations des différents termes de l'accolade de la relation (50). Cette étude est particulièrement simple si $i' = 0$ car alors l'accolade devient :

$$\mu^2(\cos\varphi+\mu)\sin\omega\left[\frac{1}{\sin^2\varphi\sin(\varphi-\omega)}+\frac{2}{\cos\omega\sin\varphi\sin\psi}\right]+\frac{2\mu(\cos\varphi+\mu)}{\sin\psi}-\cos^2\Phi.$$

Elle décroît constamment dans l'intervalle de variation de φ, comme ses deux premiers termes, de l'infini positif à $-\cos^2\Phi$ et alors elle admet dans cet intervalle une racine unique.

Dans le cas général, l'étude est plus complexe car $\sin\tau$ ne croît par toujours et p ne décroît pas.

Étudions en effet la fonction p :

$$p = \sin(\omega - 2i')[2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda] + \sin 2i'\left[-\cos^2\varphi + \frac{\cos\omega}{\cos\omega - \lambda}\right],$$

et l'on a, après calculs :

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi} = \sin\varphi\cos\varphi\left\{\left[4\cos\omega + \frac{1}{\lambda}\right]\sin(\omega - 2i') + \sin 2i'\left[2 + \frac{\cos\omega}{(\cos\omega - \lambda)\lambda}\right]\right\}.$$

Je dis que $\frac{\partial p}{\partial\varphi}$ est toujours positif. En effet il est visible que pour $i' = 0$ on ait effectivement $\frac{\partial p}{\partial\varphi} > 0$. Ensuite la substitution de i à i' dans l'expression de $\frac{\partial p}{\partial\varphi}$ donne, après un calcul assez long, un résultat positif. Comme $\frac{\partial p}{\partial\varphi}$ peut être mis sous la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi} = A\sin 2i' + B\cos 2i'.$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour l'étude du signe du coefficient p lui-même montre que $\frac{\partial p}{\partial\varphi}$ est toujours positif

Quant à $\sin \tau$ nous avons vu que, s'il commence toujours par croître avec φ, il peut décroître aussi.

Bien plus, il est facile de voir que, chacun des deux premiers termes de l'accolade ne décroît pas toujours. Cependant lorsque φ est assez voisin de Φ, il est évident que c'est la fonction μ qui donne le sens de variation à ces termes. C'est ainsi que nous avons pu reconnaître qu'il n'y a qu'une racine de l'équation $\xi = 0$. Nous avons à cet effet borné le champ d'existence des racines de cette équation dans un intervalle $(\Phi_1 - \Phi)$ intérieur à l'intervalle $(\varphi' - \Phi)$. A chaque système de valeurs des variables (Φ, ω, i'), nous avons remplacé les deux premiers termes de l'accolade (50), par une fonction f des mêmes variables, toujours décroissante, quand φ croît, mais de valeur plus petite. Nous obtenons une équation :

$$f(\Phi, \varphi, \omega, i') - \cos^2 \Phi = 0,$$

qui ne possède qu'une racine dans l'intervalle $(\varphi' - \Phi)$. Nous avions borné cette racine dans un intervalle réduit $(\Phi_1 - \Phi)$. Il est alors évident que toutes les racines de $\xi = 0$ sont dans cet intervalle. Nous avons reconnu que Φ_1 est suffisamment rapproché de Φ pour que l'accolade de l'équation (50) décroisse continuellement dans l'intervalle $(\Phi_1 - \Phi)$. Ceci prouve que cette équation $\xi = 0$ n'a qu'une racine dans cet intervalle $(\Phi_1 - \Phi)$ et, par conséquent, dans l'intervalle plus grand $(\Phi' - \Phi)$.

Donc, la quantité k', ayant sa dérivée de signe contraire à celui de ξ, c'est-à-dire d'abord négative puis positive, admet bien un minimum unique. Ce minimum se produit d'ailleurs pour une valeur de φ assez voisine de Φ.

Pour obtenir d'une façon pratique la racine φ, de l'équation $\xi = 0$ nous regarderons cette équation comme une équation au second degré en μ comme le fait M. Callandreau dans sa thèse :

$$\mu = \sqrt{\sin^2 \Phi - \sin^2 \varphi}.$$

Reprenons donc l'expression (45) de ξ que nous mettrons sous la forme réduite :

$$\xi = p\mu^2 + s\mu - r = 0,$$

avec :

$$\left\{\begin{aligned} p &= \sin(\omega - 2i')[2\sin^2\varphi \sin\omega + \lambda] + \sin 2i' \left[-\cos^2\varphi + \frac{\cos\omega}{\cos\omega - \lambda}\right], \\ s &= \sin^3\varphi \cos^2(\omega - i')[\sin\psi \sin\tau + 2], \\ r &= \sin^3\varphi \cos^2(\omega - i') \cos\varphi \sin\psi \sin\tau, \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

où p, s et r sont toujours positifs.

Si μ' et μ'' sont les deux racines de l'équation $\xi = 0$ en μ, on a :

$$\begin{matrix}\mu' \\ \mu''\end{matrix} \quad \frac{-s \pm \sqrt{s^2 + 4rp}}{2p}.$$

que nous écrirons :

$$\begin{cases} \mu' \\ \mu'' \end{cases} = \frac{s}{2p}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4rp}{s^2}}\right].$$

Or, la valeur cherchée de φ ne saurait correspondre que pour la racine μ' qui est positive. Au contraire μ'' est négative. Or, l'étude de $\frac{pr}{s^2}$ permet de se rendre compte que cette fonction est toujours très petite et ne dépasse jamais la valeur 0,0644. Dans ces conditions, le radical de l'expression de μ' :

$$\mu' = \frac{s}{2p}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4rp}{s^2}}\right] \qquad (52)$$

est développable en une série d'ailleurs très rapidement convergente, puisque la fonction $\frac{4rp}{s^2}$ est toujours plus petite que 0,26 :

$$q_{\prime\prime} = \frac{4rp}{s^2} < 0{,}26.$$

On a, après calculs :

$$\mu' = \frac{r}{s}\,[1 - q_{\prime\prime} + 2q_{\prime\prime}^2 - 5q_{\prime\prime}^3 + 14q_{\prime\prime}^4 - 42q_{\prime\prime}^5 + \ldots].$$

On a, entre crochets, une série alternée très rapidement convergente. Par suite, dans le calcul pratique de ce crochet, une limite supérieure de l'erreur commise est inférieure à la valeur du premier terme négligé. La valeur approximative sera obtenue par défaut ou par excès, suivant le signe de ce premier terme négligé.

Ainsi la solution μ qui nous intéresse peut se mettre sous la forme simple :

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{r}{s} \times A_{\prime\prime}, \\ \text{où} \qquad & \\ A_{\prime\prime} &= 1 - q_{\prime\prime} + 2q_{\prime\prime}^2 - 5q_{\prime\prime}^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

En remplaçant r et s par leurs valeurs, nous pouvons écrire :

$$\mu = \frac{\cos\varphi \times \sin\psi \times \sin\tau}{2 + \sin\psi \times \sin\tau} \times A_{\prime\prime}.$$

En élevant au carré, il vient :

$$\cos^2\varphi - \cos^2\Phi = \cos^2\varphi \quad \frac{\sin^2\psi \sin^2\tau}{(2 + \sin\psi \times \sin\tau)^2} \quad A_{\prime\prime}^2,$$

soit :

$$\cos^2\varphi\left[1 - \frac{\sin^2\psi \sin^2\tau}{(\sin\psi \sin\tau + 2)^2}\right] = \cos^2\Phi.$$

En remplaçant les cosinus en fonctions des tangentes, il vient, tous calculs faits :

$$\operatorname{tg}^2 \Phi = \operatorname{tg}^2 \varphi \left[1 + \frac{A_{i'}^2 \sin^2 \psi \sin^2 \tau}{(\sin \psi \sin \tau + 2)^2 - A_{i'}^2 \sin \psi \sin \tau} \times \frac{1}{\sin^2 \varphi} \right],$$

soit :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} \times \frac{A_{i'}^2}{\left(\sin \psi + \frac{2}{\sin \tau}\right)^2 - A_{i'}^2 \sin^2 \psi}}}.$$

que nous écrirons plutôt sous la forme suivante :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} \times \frac{1}{8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{4}\right)} \times \frac{4(1 + \sin \psi) A_{i'}^2}{\left(\sin \psi + \frac{2}{\sin \tau}\right)^2 - A_{i'}^2 \sin^2 \psi}}}. \quad (53)$$

En remarquant que l'on a :

$$4(1 + \sin \psi) = 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right).$$

En effet cette forme de $\operatorname{tg} \varphi$ met en évidence des termes déjà étudiés par M. Callandreau dans son étude particulière du cas ou $i' = 0$.

Cette expression (53) de $\operatorname{tg} \Phi$ est susceptible de donner une valeur approchée de φ si l'on y remplace dans le second membre φ par Φ. Cette valeur peut être inférieure ou supérieure à la valeur exacte de φ suivant les valeurs des variables (Φ, ω, i').

Avant d'étudier théoriquement l'expression (53), nous avons déterminé directement, pour avoir des points de comparaison numériques certains, les racines de l'équation $\xi = 0$ pour un certain nombre de valeurs des arguments (ω, Φ et i'). En remarquant que, pratiquement Φ ne varie qu'entre 20° et 50°, les solutions, consignées dans le tableau ci-contre, ont été obtenues par approximations successives et sont exactes à une seconde près par défaut. Nous avons, en outre, marqué les valeurs de l'angle critique i pour chaque série de valeurs du couple ($\omega\Phi$).

Tous les angles sont donnés en *degrés, minutes et secondes*. Notons, une fois pour toutes, que tous les chiffres, de ce tableau (voir page 34) et de tous les tableaux qui suivent, pour $i' = 0$, ont été pris dans la thèse de M. Callandreau.

En première approximation nous pourrions, en remplaçant $A_{i'}$ par 1 et φ par Φ dans l'expression (53) de $\operatorname{tg} \varphi$, obtenir une valeur approchée de de la racine de $\xi = 0$. Faire $A_{i'} = 1$ revient à ne considérer que le premier terme de la série définissant $A_{i'}$ ou à négliger le terme en μ^2 de l'équation en μ. Ceci n'est légitime que si ω et i' sont dans le voisinage de zéro. Les écarts entre les valeurs ainsi obtenues de φ et les valeurs

	Φ = 50°						Φ = 40°					Φ = 30°				Φ = 20°		
θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	0°	10°	20°	30°	40°	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°
ζ	20°	18° 26′ 57″	16° 44′ 28″	14° 37′ 36″	11° 28′ 38″	0°	25°	22° 9′ 49″	18° 55′ 36″	14° 28′ 3″	0°	30°	24° 50′ 20″	18° 25′ 11″	0°	35°	24° 44′ 39″	0°
ζ 0°	48 6 5	48 40 51	49 9 45	49 34 15	49 53 7	50	37 59 4	38 49 16	39 26 33	39 51 53	40	28 5 31	29 10 9	29 48 40	30	18 27 6	19 40 1	20
ζ 5°	49 14 23	49 32 10	49 45 21	49 54 33	49 59 19		38 59 32	39 29 30	39 48 49	39 58 29		28 54	29 36 19	29 56 35		19 0 45	19 50 51	
ζ 10°	49 48 22	49 54 36	49 58 9	49 59 41	49 59 59		39 36 15	39 50 46	39 57 53	39 59 56		29 27 15	29 51 20	29 59 27		19 25 56	19 56 48	
ζ 15°	49 59 3	49 59 49	49 59 59				39 54 5	39 58 42	39 59 55			29 47 15	29 58 4	29 59 59		19 43 7	19 59 19	
ζ 20	50						39 59 32	39 59 59				29 56 52	29 59 52			19 53 26	19 59 58	
ζ 25°							40					29 59 45				19 58 22		
ζ 30°												30				19 59 52		
ζ 35°																20		

exactes sont assez notables et dépassent 10 minutes. Il y a lieu de faire des corrections.

D'autre part la formule donnée par Boussinesq :

$$\operatorname{tg}(\varphi + 2') = \frac{\operatorname{tg}\Phi}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\Phi}{2}\right)}}},$$

étant trop particulière ($\omega = 0$ et $i' = 0$) n'est pas susceptible de généralisation.

Nous écartons donc toutes les formules de première approximation.

Revenons alors à l'expression (53) qui peut s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\Phi}{\sqrt{1 + zv}}, \\ &\text{avec :} \\ &z = \frac{\sin^2\psi}{4\sin^2\varphi(1 + \sin\psi)}, \quad v = \frac{4(1 + \sin\psi)A_i^2}{\left(\sin\psi + \dfrac{2}{\sin\tau}\right)^2 - A_i^2\sin^2\psi}. \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

On reconnaît aisément que la fonction Z décroît constamment quand ω croît pour atteindre la valeur zéro quand $\omega = \varphi$. Si nous appelons Z la fonction obtenue en substituant dans z l'argument Φ à φ, M. Callandreau a étudié plus particulièrement la fonction $\frac{z}{Z}$ et a montré que cette fonction peut très approximativement être représentée par :

$$\frac{z}{Z} = 1 + \left(\frac{\omega}{\Phi} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)N \qquad (56)$$

où ε_1 et N sont fonctions de la seule variable Φ. ε_1 décroît de 10,4 à 9,5, et N de 0,205 à 0,177 quand Φ croît de 20° à 50°. On peut donc considérer ε_1 et N comme constantes quelles que soient Φ.

Quant à la fonction v nous pouvons l'écrire :

$$\begin{aligned} v &= \frac{4(1 + \sin\psi)A_i^2}{\left(\sin\psi + \dfrac{2}{\sin\tau}\right)^2 - A_i^2 \times \sin^2\psi} \\ &= \sin^2\tau \times \frac{1 + \sin\psi}{1 + \sin\psi\sin\tau} \times \frac{4(1 + \sin\tau\sin\psi)A_i^2}{(\sin\tau\sin\psi + 2)^2 - A_i^2\sin^2\psi\sin^2\tau} \end{aligned}$$

Pour étudier v, nous étudierons les deux fonctions :

$$v_1 = \sin^2\tau\,\frac{1 + \sin\psi}{1 + \sin\tau\sin\psi}$$

et

$$v_2 = \frac{4(1 + \sin\tau\sin\psi)A_i^2}{(\sin\tau\sin\psi + 2)^2 - A_i^2\sin^2\psi\sin^2\tau}.$$

Relativement à v_1, si nous posons :

$$\sin\sigma = \sin\psi \sin\tau$$

on a :

$$v_1 = \frac{4(1+\sin\sigma)A_{i'}^2}{(\sin\sigma+2)^2 - A_{i'}^2 \sin^2\sigma}.$$

On a alors :

$$v_1 = \frac{[(2+\sin\sigma)^2 - \sin^2\sigma)]A_{i'}^2}{(\sin\sigma+2)^2 - \sin^2\sigma A_{i'}^2}.$$

Soit

$$v_1 = \frac{(1-\beta^2)A_{i'}^2}{1-\beta^2 A_{i'}^2}$$

en posant

$$\beta^2 = \frac{\sin^2\sigma}{(2+\sin\sigma)^2}.$$

$$v_1 = 1 - \frac{1-A_{i'}^2}{1-\beta^2 A_{i'}^2}.$$

Comme β^2 est toujours positif et inférieur à l'unité, v_1 sera lui-même inférieur à l'unité puisque $(1-\beta^2) < 1-\beta^2 A_{i'}^2$; de sorte que v_1 sera lui-même compris entre 0 et 1. Son plus grand écart de l'unité se déduit du maximum de la fraction $\frac{1-A_{i'}^2}{1-\beta^2 A_{i'}^2}$. Ce dernier sera certainement inférieur à la valeur obtenue en considérant dans cette fraction un maximum de $(1-A_{i'}^2)$ et une plus petite valeur pour le dénominateur $(1-\beta^2 A_{i'}^2)$. Ceci nous amène à remplacer dans le numérateur $A_{i'}$ par $(1-q_{i'})$ et dans le dénominateur $A_{i'}$ par 1. D'autre part, cherchons un maximum de la fonction :

$$\beta^2 = \frac{\sin^2\sigma}{(2+\sin\sigma)^2}$$

ou de :

$$\beta = \frac{\sin\sigma}{2+\sin\sigma}.$$

On a :

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = \frac{2\cos\sigma}{(2+\sin\sigma)^2}.$$

Donc $\frac{d\beta}{d\sigma}$ est toujours positif et β est maximum en même temps que σ ou, ce qui revient au même $\sin\sigma$.

Or :

$$\sin\sigma = \sin\tau \sin\psi.$$

Nous avons vu que sin τ et sin φ décroissent tous les deux constamment quand ω croît. Sin σ est donc maximum quand ω est nul.

De même sin σ est maximum quand $i' = 0$ et, dans ces conditions, il faudra remplacer φ par Φ dans sin σ. En effet pour $i' = \omega = 0$, sin σ = sin φ croît quand φ croît. En remplaçant alors φ par 45° le maximum de β^2 se trouve être égal à 0,0682.

De sorte qu'un écart maximum cherché de l'unité pour v_1 vaudra :

$$1 - v_1 = \frac{2q_{i'} - q_{i'}^2}{0{,}932} \cong 0{,}133,$$

en prenant pour $q_{i'}$ sa valeur maximum obtenue plus haut, soit 0,0644.

Ainsi donc, v_1 est toujours voisine de l'unité et par valeurs inférieures et son plus grand écart est 0,133. Dans le cas où $i' = 0$, v_1 est égal à l'unité pour les valeurs extrêmes $\omega = 0$ et $\omega = \varphi$ ou Φ. Sa courbe représentative est, de plus, tangente aux mêmes points à la droite $v_1 = 1$. On peut alors admettre que le plus grand écart de v_1 de l'unité se produit au voisinage de $\omega = \frac{\varphi}{2}$ ou $\frac{\Phi}{2}$, de sorte que les variations de v_1 pourraient être représentées sous la forme parabolique :

$$v_1 = 1 + \frac{\omega}{\Phi}\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right) M, \qquad (56)$$

où nous remplacerons M par la valeur constante 0,532 qui exprime qu'une limite supérieure de la quantité $(1 - v_1)$ est 0,133.

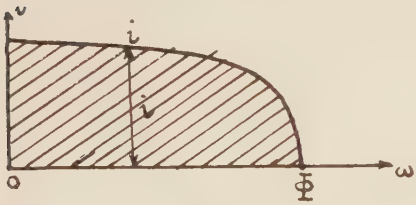

Fig. 7.

Étudions maintenant le cas général où $i' \neq 0$. v_1 ne peut être égal à 1 que pour $A_{i'} = 1$ soit pour $q_{i'} = 0$. Sur l'expression de $q_{i'}$ on voit que cette quantité ne peut être nulle que si sin σ ou p est nul.

Or, sin σ est nul pour une valeur de ω inférieure à φ, ou Φ, et définie par l'équation en ω :

$$i' = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} - \frac{1}{2}(\omega' - \omega) \qquad \text{ou} \qquad \sin \omega' = \frac{\sin \omega}{\sin \Phi}.$$

Pour chaque valeur de i' on a une racine ω_1, inférieure à Φ et ω varie dans l'intervalle $(0, \omega_1)$. On a ainsi défini le champ des variations du couple (ω, i') pour une valeur Φ donnée. Ce champ rapporté à deux axes rectangulaires $(O\omega, Oi')$ est limité par ces axes et par une courbe définie par l'équation entre i' et ω ci-dessus. La valeur limite i' ainsi définie, lorsque ω est donné, n'est autre que i.

Pour $\omega = \Phi$, i est nul et la tangente au point ainsi défini, est parallèle à l'axe Oi'. En effet :

$$\frac{\partial i}{\partial \omega} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega'}{\partial \omega} - 1\right);$$

$$= -\frac{1}{2\lambda}(\cos\omega - \lambda)$$

$\frac{\partial i}{\partial \omega}$ est toujours négatif et, pour $\omega = \Phi$, $\lambda = 0$ et $\frac{\partial i}{\partial \omega}$ est infini négatif. Ceci légitime la courbe tracée. Pour un point situé sur cette courbe-limite du champ $\sin\sigma$ ainsi que $q_{i'}$ sont nuls.

D'autre part $q_{i'}$ est nul pour $p = 0$. Or p, comme nous l'avons vu, ne s'annule pas dans le champ défini plus haut, sauf au point $\omega = 0$, $i' = 0$. En général p, considérée comme fonction de i', s'annule pour une valeur de i' négative. Cette racine de $p = 0$ peut être déterminée facilement si nous assimilons φ à Φ. On a, en effet, l'équation :

$$\left[\left(\frac{\cos\omega}{\cos\omega - \lambda} - \cos^2\varphi\right) - \cos\omega\,(2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda)\right]\operatorname{tg} 2i'$$
$$+ \sin\omega\,[2\sin^2\varphi\cos\omega + \lambda] = 0.$$

Si nous désignons pas i'_1, la racine négative et supérieure à $-\frac{\pi}{2}$ qui nous intéresse, on a $i'_1 = 0$ pour $\omega = 0$. D'autre part, pour $\omega = \varphi$ ou Φ, on trouve facilement $i'_1 = -\frac{\pi}{2} + \Phi$. Pour chaque valeur de ω, Φ étant constante, on a ainsi une valeur de i' négative qui annule p. Par l'étude de la dérivée on trouve que $\frac{\partial i'}{\partial \omega}$ est infinie négative pour $\omega = \varphi$ ou Φ et, pour $\omega = 0$:

$$\frac{\partial i'}{\partial \omega} = -\frac{(1 - \sin\varphi)(1 + 2\sin\varphi)}{2\sin^2\varphi}.$$

Nous avons tracé les courbes représentant les variations de i'_1, en fonction de ω pour $\Phi = 20$ et $\Phi = 45$. Nous constatons, en remarquant que pour une valeur donnée quelconque de Φ la courbe présente une allure intermédiaire, que, en première approximation, on peut assimiler ces courbes à des droites joignant les points extrêmes. En réalité nous avions essayé d'autres solutions possibles mais les calculs ont montré que notre hypothèse donne les résultats les plus simples et les plus précis comme nous le verrons plus loin.

Ainsi, pour ω donné, $q_{i'}$ s'annule pour deux valeurs de i', l'une i positive qui annule $\sin\sigma$, l'autre i'_1 négative donnée par l'équation

$p = 0$. Cette dernière est définie avec une approximation très suffisante par l'équation de la droite que nous venons de définir.

$$i'_1 = -\frac{\frac{\pi}{2} - \Phi}{\Phi} \times \omega.$$

La quantité $(1 - v_1)$, pour i' compris entre i'_1 et i, est toujours positive et de valeur très petite. Si nous assimilons à une parabole la courbe

Fig. 8.

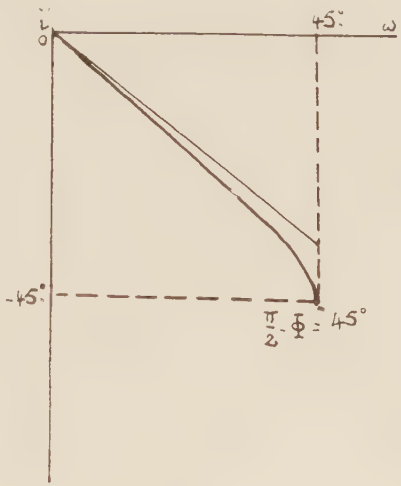

Fig. 9.

représentant ses variations entre i et i'_1 lorsque ω est constante, l'équation de cette parabole sera :

$$(1 - v_1) - \eta = \left(1 - \frac{i'}{i}\right)\left(\frac{i'}{\omega} + \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi}{\Phi}\right) S,$$

S est déterminée par le fait que, pour $i' = 0$, v_1 est défini par l'équation (56). Ceci permet d'écrire :

$$1 - v_1 = \eta - \left(1 - \frac{i'}{i}\right)\left(\frac{i'}{\omega} + \frac{\frac{\pi}{2} - \Phi}{\Phi}\right) \times \frac{\omega}{\Phi}\left(1 - \frac{\omega}{\Phi}\right) \times M. \quad (57)$$

Étudions maintenant v_2 :

$$v_2 = \sin^2 \tau \times \frac{1 + \sin \psi}{1 + \sin \tau \sin \psi},$$

v_2 est toujours positif et inférieur à 1 puisque, écrire $v_2 \leqslant 1$, revient à l'inégalité :

$$(\sin\tau - 1)[\sin\tau \sin\psi + 1 + \sin\tau] \leqslant 0.$$

v_2 ne peut s'annuler que pour $\sin\tau = 0$, c'est-à-dire pour $i' = i$ et, dans ce cas, nous retombons sur la solution de Maurice Lévy et φ est égal à l'angle maximum Φ de frottement. De plus, la dérivée en i' de v_2 est nulle pour $i' = i$. La courbe représentative est donc tangente au point $i' = i$ à l'axe des i'. Cette courbe a une allure parabolique. Si nous explicitons l'expression de v_2, nous voyons que, en confondant $\frac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i}$ avec $\frac{i'}{i}$, v_2 peut être mis sous une forme renfermant $\left(1 - \frac{i'}{i}\right)^4$. Lorsque i' varie de 0 à i, $\sin\tau$ décroît de 1 à 0 et la fraction $\frac{1 + \sin\psi}{1 + \sin\tau \sin\psi}$ varie de 1 à $1 + \sin\psi \times \frac{i'}{i}$. On pourrait donc écrire approximativement :

$$v_2 = \left(1 - \frac{i'}{i}\right)^4 \left[1 + \frac{i'}{i} \times \sin\Psi\right],$$

où toutes les grandeurs sont calculées avec l'argument Φ. Cependant cette forme ne nous a pas paru suffisamment approximative, comme les essais numériques le prouvent d'ailleurs.

D'une façon plus précise, si nous désignons par V_2 la valeur de v_2 obtenue en remplaçant φ par Φ, le rapport $\frac{v_2}{V_2}$ est toujours très voisin de l'unité. Les courbes représentatives de v_2 et V_2 se coupent pour $i' = i$ où elles admettent la même tangente et pour $i' = 0$. On pourrait chercher à représenter $\frac{v_2}{V_2}$ par un développement de la forme $(1 + e)$ où e serait une fonction simple de i', ω et Φ mais cette recherche est aussi bien inutile qu'infructueuse. En effet e, on le prévoit, est toujours extrêmement petit et, en fait, les études numériques systématiques faites sur v_2 ont montré que l'écart $(V_2 - v_2)$, en valeur absolue, ne dépasse jamais le soixante-dixième de la valeur de v_2. Nous remplacerons donc v_2 par V_2 dans nos formules.

Remplaçons alors dans le produit zv, z et v par les expressions approchées trouvées plus haut, développant puis supprimant les termes en MN toujours très petits et négligeables, on a :

$$zv \cong ZV_2 \times \left[1 - \zeta\nu\left(\frac{\omega}{\Phi} - \frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)\right]$$

$$\times \left\{1 - M\frac{\omega}{\Phi}\left(\frac{\omega}{\Phi} - 1\right)\left[\frac{2\Phi}{\pi - 2\Phi} \times \frac{i'}{\omega}\left(1 - \frac{i'}{i}\right) - \frac{i'}{i}\right]\right\}$$

Nous avons posé :

$$\zeta = \varepsilon_1 \times \frac{M+N}{N} \qquad \nu = \frac{N}{\varepsilon_1},$$

ou, en écrivant l'accolade sous forme plus explicite de deux facteurs :

$$\left.\begin{aligned} zv \equiv ZV_2 &\left[1+\zeta\times\nu\left(\frac{\omega}{\Phi}-\frac{1}{\zeta}\right)\left(\frac{\omega}{\Phi}-1\right)\right]\left[1+M\times\frac{i'}{i}\times\frac{\omega}{\Phi}\left(1-\frac{\omega}{\Phi}\right)\right] \\ &\times\left[1-M\times\frac{i'}{\frac{\pi}{2}-\Phi}\times\left(1-\frac{\omega}{\Phi}\right)\left(1-\frac{i'}{i}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Cette formule représenterait effectivement zv si ζ, ν et M étaient considérés comme variables avec les angles ω, Φ et i',

$$zv = ZV_2 \times A.$$

Cependant nous avons vu que ζ, ν et M varient très peu. En fait $\nu = \frac{N}{\varepsilon_1}$ est compris entre 0,0197 et 0,0123 et ζ entre 37 et 47. Quant à M sa valeur a été surestimée à 0,532. Nous avons comparé la valeur exacte de A obtenue en utilisant le tableau (54) et celle de A_2 donnée en remplaçant dans l'expression (58), $\zeta\nu$ par $0{,}018 \times 40$, $\frac{1}{\zeta}$ par $\frac{1}{40}$ et M par 0,532. Les écarts peuvent être considérés comme négligeables.

Au facteur exact A nous avons substitué une quantité très peu différente que nous désignerons par A_2.

Nous écrirons dons, en posant :

$$P = \sin\tau \cdot \sin\psi = \frac{\cos^2 i' \times \sin^{3/2}(\Phi-\omega)\sin^{1/2}(\Phi+\omega)}{\cos^2(\omega-i')\sin\Phi}\left[1-\frac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i}\right]^2$$

où dans $\sin\tau$ et $\sin\psi$ on a remplacé φ par Φ :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\operatorname{tg}\Phi}{\sqrt{1+\frac{P}{4\sin^2\Phi[1+P]}\left[1+0{,}018\times 40\left(\frac{\omega}{\Phi}-1\right)\left(\frac{\omega}{\Phi}-\frac{1}{40}\right)\right]\frac{\omega}{\Phi}\left(1-\frac{\omega}{\Phi}\right)\left[1-0{,}532\,\frac{i'}{\frac{\pi}{2}-\Phi}\left(1-\frac{\omega}{\Phi}\right)\left(1-\frac{i'}{i}\right)\right]}}. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Formule relativement compliquée mais qui présente l'avantage, comme nous le verrons, de fournir une très bonne approximation non seulement dans le champ que nous étudions mais aussi pour i' négatif. De plus la forme particulière (35) rentre bien dans le cadre de celle-ci. Les

formules plus simples essayées n'ont pas donné des résultats satisfaisants.

Remarquons que P est toujours inférieur à l'unité si i' est positif mais peut prendre des valeurs supérieures à 1 pour $i' < 0$ auquel cas notre formule semble s'appliquer.

Pour $i' = 0$ nous retrouvons la formule approchée de M. Callandreau.

Mais, notre approximation, qui a consisté à remplacer le facteur exact A par le facteur approché A_2 ou, ce qui revient au même, à introduire des coefficients numériques *moyens*, ne permet pas de nous rendre compte, *a priori*, de la répercussion que cette approximation peut avoir sur le facteur k' lui-même. Cherchons alors à évaluer l'erreur commise sur k' par la substitution de φ_2 à φ dans nos formules. On sait que cette erreur ρ a pour expression générale :

$$\rho = (\varphi - \varphi_2) \times \left(\frac{dk'}{d\varphi}\right)_{\varphi \pm j(\varphi - \varphi_2)} \tag{60}$$

avec $0 < j < 1$.

Comme la tangente trigonométrique est inférieure à l'arc correspondant, on a, en valeur absolue :

$$\rho < \left| \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_2) \right| \times \left| \left(\frac{dk'}{d\varphi}\right)_{\varphi \pm j(\varphi - \varphi_2)} \right|.$$

Ou, en tenant compte de la relation (45) :

$$\rho < \left| \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_2) \right| \left[\frac{\cos(\omega - i')}{\cos^2 \Phi} \times \frac{(\cos \omega - \lambda)^2}{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \times \frac{\cos \varphi - \mu}{\lambda \mu} \times \xi \right]_{\varphi \pm j(\varphi - \varphi_2)}.$$

Cherchons une limite supérieure de cette expression. Étant donné l'angle i', ω, nous l'avons vu, est compris entre 0 et ω_1 déterminé par l'équation :

$$i' = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} - \frac{1}{2}(\omega' - \omega).$$

On reconnaît alors facilement que le produit $\cos(\omega - i')(\cos \omega - \lambda)^2$ est maximum si on y remplace ω par sa valeur la plus grande ω_1. En effet, la dérivée de ce produit est toujours positive. On obtient ainsi une expression variable avec le seul angle i' ou, ce qui revient au même, avec ω_1, i', étant fonction bien définie de ω. La dérivation de ce nouveau produit par rapport à ω, montre qu'il a une valeur maximum pour $\omega_1 = \varphi$ ou Φ. Ainsi le produit $\cos(\omega - i')(\cos \omega - \lambda)^2$ admet comme valeur la plus grande $\cos^3 \varphi$.

La quantité $\dfrac{\cos \varphi}{\cos \varphi + \mu} \times \dfrac{1}{\sin^2 \varphi}$ est toujours inférieure, ou au plus égale à $\dfrac{1}{\sin^2 \varphi}$. En remarquant que le rapport $\dfrac{\sin^2 \Phi}{\sin^2 \varphi}$ est le plus grand

pour $i' = 0$ et pour les plus faibles valeurs de Φ, le maximum de ce rapport a lieu pour $\Phi = 20^\circ$, $i' = \omega' = 0$. Alors $\varphi = 18^\circ\ 27'\ 6''$ (54) et $\frac{\sin^2 \Phi}{\sin^2 \varphi}$ vaut 1,1167. On peut donc ecrire :

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} < \frac{1,12}{\sin^2 \Phi}$$

et, aussi :

$$\varphi < |\mathrm{tg}\ (\varphi - \varphi_2)| \left[\frac{1,12}{\sin^2 \Phi} \times \frac{\xi_{\varphi \pm j(\varphi - \varphi_2)}}{\lambda \mu} \right].$$

Il n'est pas commode de chercher directement une limite supérieure de $\xi_{\varphi \pm j(\varphi - \varphi_2)}$. Nous avons reconnu lors de la recherche directe de la racine φ de l'équation $\xi = 0$, et ce résultat subsiste par raison de continuité pour toutes les valeurs de φ dans le champ du problème, que le premier membre de cette équation, où l'on remplaçait φ par sa valeur exacte à plus d'une seconde près par défaut, était au plus égal à $\frac{1}{10^5}$. Comme les accroissements d'une fonction sont sensiblement proportionnels aux petits accroissements de la variable, sous condition, bien entendu, de continuité de la fonction et de sa dérivée, une valeur supérieure à l'expression $\xi_{\varphi \pm j(\varphi - \varphi_2)}$ est $\frac{1}{10^5} |\varphi - \varphi_2|$ où $(\varphi - \varphi_2)$ est évaluée en secondes.

Cette limite est inférieure à $2.063\ |\mathrm{tg}\ (\varphi - \varphi_2)|$ expression obtenue en transformant $(\varphi - \varphi_2)$ secondes en la tangente trigonométrique du même arc. On a donc :

$$\varphi < 2,063 \times \frac{1,12}{\sin^2 \Phi} \times \frac{\mathrm{tg}^2\ (\varphi - \varphi_2)}{\lambda \mu}. \qquad (61)$$

On obtient facilement des plus petites valeurs de λ et μ et une plus grande valeur de $|\mathrm{tg}\ (\varphi - \varphi_2)|$ en utilisant les deux relations connues :

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{\mathrm{tg}\ \Phi}{\sqrt{1 + ZV_2A}}, \qquad \mathrm{tg}\ \varphi_2 = \frac{\mathrm{tg}\ \Phi}{\sqrt{1 + ZV_2A_2}}.$$

On a alors :

$$\lambda^2 = \sin^2 \varphi - \sin^2 \omega = \sin^2 \Phi\ [1 + ZAV_2 \cos^2 \Phi]^{-1} - \sin^2 \omega,$$

Développons le crochet suivant les puissances croissantes de $ZAV_2 \cos^2 \Phi < 1$. Comme on a une série alternée on peut écrire :

$$\lambda^2 > \sin^2 \Phi - \mathrm{si}^2\ \omega - \frac{\sin^2 2\Phi}{4} ZAV_2.$$

Or, $V_2 \leqslant 1$ et, en remplaçant Z par sa valeur, on a :

$$\lambda^2 > (\sin^2 \Phi - \sin^2 \omega) \left[1 - A \frac{\sin^2 (\Phi - \omega) \cos^2 \Phi}{4 \cos^2 \omega \sin^2 \Phi} \right].$$

La dérivée en ω de la fraction du crochet est toujours négative dans le champ du problème. Une plus grande valeur de A, ainsi que cela résulte de son étude numérique est 1,03. De sorte que

$$\lambda^2 > (\sin^2 \Phi - \sin^2 \omega)[1 - \frac{1,03}{4} \cos^2 \Phi],$$

et, en remplaçant dans le crochet Φ par 20° et en extrayant la racine carrée :

$$\lambda > 0,86 \lambda \Phi. \qquad (62)$$

Quant à μ, on peut écrire :

$$\mu^2 = \sin^2 \Phi - \sin^2 \varphi = \frac{ZAV_2}{4} \times \sin^2 2\Phi [1 + ZAV_2 \cos^2 \Phi]^{-1}.$$

Et, en opérant comme pour λ^2 :

$$\mu^2 > \frac{ZAV_2}{4} \sin^2 2\Phi [1 - ZA \cos^2 \Phi]$$

et, en remplaçant dans le crochet Z, A, $\cos^2 \Phi$ par leurs valeurs maxima :

$$\mu^2 > \frac{ZAV_2}{4} \sin^2 2\Phi \times 0,76.$$

Ainsi qu'il résulte de l'étude numérique de A, une plus petite valeur de cette fonction peut être prise égale à 0,76. Donc, en extrayant la la racine carrée :

$$\mu > 0,38 \sin 2\Phi \times (ZV_2)^{1/2}. \qquad (63)$$

Enfin, relativement à tg $(\varphi - \varphi_2)$, on a immédiatement :

$$\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_2) = \operatorname{tg} \Phi \frac{\sqrt{1 \quad ZA_2V_2} - \sqrt{1 + ZAV_2}}{\operatorname{tg}^2 \Phi + \sqrt{1 + ZA_2V_2} \times \sqrt{1 + ZAV_2}},$$

d'où

$$|\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_2)| < \frac{\operatorname{tg} \Phi}{\operatorname{tg}^2 \Phi + 1} \left[\sqrt{1 + ZA_2V_2} - \sqrt{1 + ZAV_2}\right],$$

soit :

$$|\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_2)| < \frac{\sin 2\Phi}{2} [(1 + ZA_2V_2)^{1/2} - (1 + ZAV_2)^{1/2}].$$

En développant les parenthèses du crochet en série suivant les puissances croissantes de ZA_2V_2 et ZAV_2 et, en arrêtant comme pour le calcul de λ et μ aux termes du premier degré :

$$|\operatorname{tg} (\varphi - \varphi_2)| < \frac{\sin 2\Phi}{4} \times ZV_2 |A_2 - A|. \qquad (64)$$

Alors l'inégalité (61), en tenant compte des inégalités (62), (63) et (64), devient :

$$\rho < 2{,}063 \times \frac{1{,}12}{\sin^2 \Phi} \times \frac{\sin^2 2\Phi \times (ZV_2)^{3/2}\,[A_2 - A]^2}{16 \times 0{,}86 \times 0{,}38 \sin 2\Phi}. \qquad (65)$$

Il n'est pas aisé d'évaluer un maximum théorique du produit $V_2^{3/2}[A_2 - A]^2$. Quant à Z son expression est simple. Nous avons donc évalué numériquement l'expression $V^{3/4}\,[A_2 - A]$ pour toutes les valeurs des argumuments ω, i' et Φ considérées précédemment. On trouve ainsi, et par raison de continuité ce résultat est valable dans tout le champ du problème, qu'une limite supérieure de l'expression $V^{3/4}\,(A_2 - A)$ est $\frac{3}{10^2}$ ainsi que cela résulte du tableau qui suit des valeurs de cette grandeur données en unités de la seconde décimale (voir tableau page 46).

Ce ne sera, du reste, pas une telle limite qu'il convient de considérer. Mais, si nous considérons la fonction $(ZV_2)^{3/4}(A_2 - A)$, une étude numérique identique à la précédente montre que, cette fonction est toujours plus petite que $\frac{3}{10^3}$. Cela résulte du tableau qui suit (voir page 47) des valeurs de cette fonction données en unités de la troisième décimale. Les signes ne sont pas marqués : ils sont identiques à ceux du tableau précédent (page 46) :

On peut donc écrire en même temps (65) :

$$\rho < 2{,}063 \times \frac{1{,}12 \times 9}{16 \times 0{,}86 \times 0{,}38 \times 10^4} \times \frac{\sin 2\Phi}{\sin^2 \Phi \times \lambda_\Phi} \times Z^{3/2},$$

et aussi :

$$\rho < 2{,}063 \times \frac{1{,}12 \times 9}{16 \times 0{,}86 \times 0{,}38 \times 10^6} \times \frac{\sin 2\Phi}{\sin^2 \Phi \times \lambda_\Phi}.$$

Cela donne, après calculs :

$$\left.\begin{aligned} &\rho < \frac{3{,}977}{10^4} \times \frac{\sin 2\Phi \times \sin(\Phi + \omega)\sin^4(\Phi - \omega)}{8 \sin^8 \Phi \cos^6 \omega} \\ &\text{et} \\ &\rho < \frac{3{,}977}{10^6} \times \frac{\sin 2\Phi}{\sin^2 \Phi} \times \frac{1}{\sin^{1/2}(\Phi + \omega)\sin^{1/2}(\Phi - \omega)}. \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

L'étude des deux expressions (66) est très aisée. La première varie en sens inverse de ω et de Φ. La deuxième varie évidemment en sens inverse de Φ mais croît quand ω croît.

Et, pour que l'erreur faite sur k' en y substituant à φ la valeur approchée φ_2 soit inférieure à une unité du $n^{\text{ième}}$ d'ordre décimal,

	Φ = 50°						Φ = 40°					Φ = 30°				Φ = 20°		
ω	0°	10°	20°	30°	40°	50°	0°	10°	20°	30°	40°	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°
0°	+ 0,6	— 0,6	+ 0,3	+ 1,7	+ 2,8	0	— 0,1	— 0,0	— 0,5	— 0,9	0	+ 0,2	— 0,2	+ 0,9	0	+ 0,2	+ 1,3	0
5°	+ 0,4	— 0,9	— 1,4	— 1,2	— 0,7		+ 0,2	— 0,2	— 2,0	— 1,4		+ 0,1	— 1,7	— 2,2		— 1,0	— 2,8	
10°	+ 0,1	— 0,6	— 0,5	— 0,3	— 0,0		+ 0,1	— 1,0	— 1,0	— 0,2		— 0,3	— 1,5	— 0,1		— 0,7	— 1,9	
15°	— 0,0	— 0,1	— 0,0				— 0,0	— 0,3	— 0,1			— 0,2	— 0,6	— 0,0		+ 0,0	— 0,6	
20°	0						— 0,0	— 0,0				— 0,2	— 0,1			— 0,3	+ 0,2	
25°							0					— 0,0				— 0,8		
30°												0				— 0,1		
35°																0		

	Φ = 50°						Φ = 40°					Φ = 30°				Φ = 20°		
ω	0°	10°	20°	30°	40°	50°	0°	10°	20°	30°	40°	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°
i' 0°	1,3	1,2	0,4	1,5	0,8	0	0,3	0,1	0,5	0,3	0	0,4	0,3	0,4	0	0,4	1,2	0
5°	1,0	1,7	1,9	1,0	0,2		0,4	0,4	2,1	0,5		0,2	2,6	0,0		2,9	2,6	
10°	0,3	1,1	0,7	0,2	0,0		0,2	1,8	1,1	0,1		0,7	2,3	1,0		1,6	1,7	
15°	0	0,1	0,2				0,1	0,5	0,1			0,5	0,9	0,0		0,2	0,5	
20°	0						0,0	0,0				0,4	0,1			0,7	0,2	
25°							0					0,0				0,2		
30°												0				0,3		
35°																0		

il suffira de pouvoir déterminer le nombre n tel que les deux expressions (66) soient à la fois inférieures à $\frac{1}{10^n}$ lorsqu'on remplacera Φ par sa plus petite valeur dans le champ du problème et ω par une certaine valeur, d'ailleurs quelconque, dans le champ du problème également.

Or pour $\Phi = 20$ et $\omega = \frac{\Phi}{2} = 10$, la première expression (66) prend la valeur $\frac{8,505}{10^5}$ et la seconde $\frac{7,417}{10^5}$.

Nous pouvons donc conclure, que l'écart sur φ résultant de la formule approchée (59) n'a qu'une très faible répercussion sur la valeur de k'. L'erreur commise sur k' en substituant φ_2 à φ est inférieure à une unité du quatrième ordre décimal. La formule (59) peut être considérée comme satisfaisante. Cette étude de φ est parallèle à celle faite par M. Callandreau dans sa thèse.

D'une façon plus directe nous avons étudié les écarts d'abord $(\varphi - \varphi_2)$ et ensuite $(k' - k'_2)$.

Le premier tableau qui suit (voir page 49) donne les valeurs de φ_2 données par la formule (59) et en le comparant avec les valeurs exactes de φ (54), nous avons constaté que l'écart maximum $(\varphi - \varphi_2)$ ne dépasse pas 40 secondes sexagésimales.

Le deuxième tableau (voir page 50) donne les valeurs de k' obtenues en utilisant les angles φ du tableau (54). Le calcul parallèle de k'_2 montre qu'en fait, le décalage $(k' - k'_2)$ ne dépasse jamais $\frac{3}{10^5}$ en valeur absolue.

Nous avons utilisé pour calculer k'_2 l'expression (32) où l'on a les angles auxiliaires bien définis :

$$\cos \varepsilon_2 = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi_2}, \quad i_2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right) - \frac{1}{2}(\omega'_2 - \omega) \quad \text{et} \quad \delta_2 = i_2 - i'.$$

La même expression a été utilisée pour calculer k'. Ces résultats confirment l'étude théorique précédente.

Nous avons aussi fait quelques essais numériques sur k' lorsque i' est négatif. La formule (59) donne des résultats très précis encore. L'écart $(\varphi_2 - \varphi)$ ne dépasse pas, dans nos essais, la valeur 2 minutes sexagésimales, écart négligeable devant la différence $(\Phi - \varphi)$ qui atteint 10 degrés quand $i' = -20$. Nous pouvons donc supposer, étant donnés les résultats précédents, que l'écart $(k' - k'_2)$ est inférieur dans ces conditions à 1/1000. Les résultats obtenus sont mentionnés plus loin et peuvent être utilisés comme point de départ d'une construction de tables de coefficients de poussée basée sur une étude encore plus précise de k' dans le cas où i' est négatif.

	Φ = 50°						Φ = 40°					Φ = 30°				Φ = 20°		
ω	0°	10°	20°	30°	40°	50°	0°	10°	20°	30°	40°	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°
0°	48 5 30	48 41 21	49 9 55	49 33 43	49 52 54	50	37 58 57	38 49 14	39 26 20	39 51 48	40	28 5 42	29 10 2	29 48 47	30	18 27 14	19 40 19	20
5°	49 13 55	49 32 47	49 46 1	49 54 49	49 59 21		38 59 22	39 29 39	39 49 17	39 58 34		28 53 55	29 36 59	29 56 48		19 1 24	19 51 25	
10°	49 49 16	49 54 52	49 58 38	49 59 43	49 59 59		39 36 45	39 51 14	39 58 7	39 59 55		29 27 29	29 51 55	29 59 30		19 26 29	19 57 5	
15°	49 59 3	49 59 49	49 59 59				39 54 7	39 58 46	39 59 55			29 47 25	29 58 13	29 59 59		19 43 5	19 59 23	
20°	50						39 59 32	39 59 59				29 56 54	29 59 53			19 53 34	19 59 57	
25							40					29 59 45				19 58 26		
30°												30				19 59 53		
35°																20		

	Φ 50°						Φ 40°					Φ 30°				Φ 20°		
ω	0°	10°	20°	30°	40°	50°	0	10°	20°	30°	40°	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°
0°	0,11531	0,12108	0,12944	0,14309	0,17155	0,41318	0,19271	0,20554	0,22685	0,27020	0,58680	0,30211	0,32884	0,38475	0,75000	0,45675	0,51425	0,88304
5°	0,13212	0,14192	0,15540	0,17669	0,21994		0,21081	0,23036	0,26060	0,32018		0,32004	0,35694	0,42933		0,47223	0,54523	
10°	0,15445	0,16986	0,19039	0,22190	0,28452		0,23348	0,26045	0,30194	0,38131		0,34018	0,38866	0,47940		0,48702	0,57770	
15°	0,18399	0,20618	0,23561				0,25972	0,29656	0,35137			0,36233	0,42355	0,53475		0,50005	0,60896	
20°	0,21985						0,29027	0,33826				0,38587	0,46095			0,51501	0,64013	
25°							0,32374					0,41005				0,52650		
30°												0,43301				0,53495		
35°																0,53900		

CHAPITRE V

SOMMAIRE. — Étude de la limite k_0 par défaut du coefficient de poussée. Les coefficients k_s. — Des meilleurs coefficients pratiques K de poussée à envisager.

La limite inférieure k_0 du coefficient de poussée est donnée par la formule (33) :

$$k_0 = \frac{\cos\varphi \cos(\varphi + i' + \delta) \cos(\omega - i') \cos(\varphi + \delta)}{\cos(\omega - i' - \delta) \cos(\varphi - \delta)},$$

dans laquelle φ est l'angle intérieur de frottement du massif.

Les diverses valeurs de k_0, pour les mêmes valeurs déjà envisagées des arguments ω, Φ et i' c'est-à-dire ici ω, φ et i' sont consignées dans le tableau suivant (voir page 52).

Dans un calcul d'ordre pratique, le coefficient K par lequel il faudra multiplier le facteur Πr pour avoir la composante normale de la poussée sur l'unité de surface du mur, aura comme valeur théorique la meilleure, la moyenne arithmétique des deux évaluations k_0 et k_2' par défaut et par excès. Le tableau de la page 53 donne les valeurs de K, ainsi défini, pour les mêmes valeurs des arguments ω, Φ et i' précédemment considérés.

Cependant, on pourrait essayer de simplifier le calcul de K en introduisant avec un facteur correctif convenable, k_0 et la limite k_s par excès définie par la relation (33 *bis*). C'est ainsi que Boussinesq a trouvé la formule pratique :

$$K = k_0 + \frac{9}{22}(k_s - k_0).$$

C'est une formule d'application trop restreinte comme l'a montré M. Callandreau. Ce dernier poursuivant le même ordre d'idées a donné la formule plus précise :

$$K = k_0 + \frac{9}{22}\left(1 - \frac{\omega^2}{\Phi^2}\right)(k - k_0).$$

Il a montré que l'approximation de cette formule n'est pas suffisante.

Dans le cas général on pourrait chercher une formule analogue et, en introduisant la variable i', il semblerait qu'une formule de la forme :

$$K = k_0 + \frac{9}{22}\left(1 - \frac{\omega^2}{\Phi^2}\right)\left(1 - \frac{i'}{i}\right)^n (k_s - k_0), \qquad (67)$$

	Φ = 50°						Φ = 40°					Φ = 30°				Φ = 20°		
ω	0°	10°	20°	30°	40°	50°	0°	10°	20°	30°	40°	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°
i' 0°	0,09240	0,10103	0,11283	0,13000	0,16333	0,41318	0,15628	0,17676	0,20555	0,25733	0,58680	0,25000	0,29378	0,31602	0,75000	0,39073	0,48439	0,88304
5°	0,12024	0,13232	0,14808	0,17143	0,21795		0,18934	0,21447	0,25041	0,31596		0,28679	0,33676	0,42089		0,42784	0,52864	
10°	0,15038	0,16690	0,18858	0,22070	0,28450		0,22263	0,25383	0,29874	0,38077		0,32273	0,37904	0,47708		0,45995	0,56950	
15°	0,18330	0,20593	0,23557				0,26206	0,29496	0,35104			0,35356	0,42041	0,53458		0,48687	0,60661	
20°	0,21985						0,28976	0,33821				0,38284	0,46075			0,50842	0,63980	
25°							0,32374					0,40957				0,52443		
30°												0,43301				0,53467		
35°																0,53900		

ω	Φ = 50°						Φ = 40°					Φ = 30°				Φ = 20°		
i' \ i	0°	10°	20°	30°	40°	50°	0°	10°	20°	30°	40°	0°	10°	20°	30°	0°	10°	20°
0°	0,10385	0,11105	0,12114	0,13653	0,16744	0,41318	0,17449	0,19115	0,21620	0,26376	0,58680	0,27606	0,31132	0,37539	0,75000	0,42374	0,49932	0,88304
5°	0,12618	0,13712	0,15174	0,17406	0,21895		0,20007	0,22241	0,25550	0,31807		0,30341	0,34685	0,42511		0,45003	0,53393	
10°	0,15242	0,16838	0,18948	0,22130	0,28451		0,22806	0,25714	0,30034	0,38104		0,33145	0,38335	0,47824		0,47349	0,57360	
15°	0,18365	0,20606	0,23559				0,26089	0,29576	0,35120			0,35795	0,42198	0,53466		0,49346	0,60778	
20°	0,21985						0,29002	0,33823				0,38436	0,46085			0,51171	0,63996	
25°							0,32374					0,40981	0,45038			0,52546		
30°												0,43301				0,53481		
35°																0,53900		

où n est sensiblement voisin de 2, donnerait des résultats intéressants. Mais, comme dans le cas particulier où $i' = 0$, on ne peut arriver à une formule simple et suffisamment précise, *a fortiori*, dans le cas général une formule de la forme (67) ne peut être envisagée. Nous n'insisterons donc pas sur une telle formule qui ne peut résulter que d'essais numériques.

Ainsi, la seule formule à employer est :

$$K = \frac{k_0 + k_2'}{2}, \qquad (68)$$

qui ne demande pas tellement plus de calculs qu'une formule du type (67).

Il serait intéressant de comparer les chiffres ainsi obtenus avec ceux proposés déjà, et découlant d'autres théories ou méthodes et même avec les résultats expérimentaux.

La plupart des recherches théoriques ne se rapportent qu'aux massifs à talus horizontal et paroi verticale. Cependant, signalons des recherches plus générales dues à Rebhahn et surtout à Résal. Ce dernier, nous l'avons vu, a étudié le problème dans toute sa généralité.

Quant aux recherches expérimentales, elles ont toutes été faites dans des cas simples.

La comparaison de ces résultats, ceux de Résal exceptés, avec ceux obtenus par la méthode de Boussinesq, rentre donc entièrement dans les cas étudiés par M. Callandreau. Ce dernier a comparé tous les résultats et a montré leur concordance. Nous n'y reviendrons pas.

Nous ne comparerons donc ces chiffres qu'avec ceux de Résal. Ce dernier définit la poussée par sa composante horizontale Q et l'angle θ qu'elle fait avec la normale au mur. Il désigne par α notre angle i'.

$$Q = \frac{A}{1000} \times \Delta \times \frac{h^2}{2},$$

où A est un coefficient numérique qu'il donne dans ses tables ; Δ, le poids spécifique de la terre composant le massif ; h la hauteur du parement de maçonnerie. Si nous désignons par k_r le coefficient par lequel il faudra multiplier le facteur Πr ou, ici, Δr pour avec la composante normale Nr donnée par la méthode de Résal, nous obtenons facilement :

$$k_r = \frac{A}{1000} \times \frac{\cos \theta}{\cos (\theta + \alpha)} \times \cos^2 \alpha.$$

Le coefficient kr a été calculé en utilisant les tables de Résal publiées en 1910 après revision de ses premiers calculs de 1903.

Nous mentionnerons donc dans les tables qui suivent (pages 55 à 57) dans une première ligne les coefficients k_r et, dans une seconde ceux K, obtenus par la méthode de Boussinesq. Nous avons limité Φ entre 20° et 45°. Le talus a toujours été pris d'inclinaisson positive. Quant à i',

ω		Φ = 20°					Φ = 25°					
		0°	5°	10°	15°	20°	0°	5°	10°	15°	20°	25°
i′	— 20°	0,295 0,29708		0,343 0,34256		0,574 0,56258	0,224 0,21675		0,252 0,25011		0,312 0,30525	0,481 0,46815
	— 10°	0,356 0,36464		0,430 0,42196		0,718 0,71732	0,277 0,28553		0,316 0,32125		0,399 0,39819	0,634 0,63167
	0°	0,418 0,42374	0,453 0,45606	0,499 0,49932	0,570 0,57309	0,883 0,88304	0,338 0,34281	0,362 0,36500	0,389 0,39396	0,430 0,43568	0,505 0,50673	0,821 0,82141
	5°	0,447 0,45003	0,484 0,48604	0,537 0,53693	0,619 0,62148		0,368 0,37010	0,396 0,39643	0,427 0,43060	0,475 0,48033	0,562 0,56398	
	10°	0,471 0,47349	0,514 0,51504	0,574 0,57360	0,668 0,66903		0,395 0,39611	0,427 0,42741	0,463 0,46825	0,521 0,52802	0,619 0,62286	
	15°	0,515 0,49346	0,578 0,54170	0,608 0,60778	0,715 0,71540		0,420 0,42068	0,458 0,45748	0,501 0,50494	0,568 0,57222	0,681 0,68340	
	20°	0,509 0,51171	0,562 0,56522	0,639 0,63996			0,444 0,44324	0,488 0,48606	0,539 0,54004	0,616 0,61809		
	25	0,522 0,52546	0,583 0,58616				0,463 0,46472	0,514 0,51263	0,574 0,57562			
	30°	0,532 0,53481	0,602 0,60220				0,480 0,48324					
	35°	0,538 0,53900										

		$\Phi = 30^\circ$							$\Phi = 35^\circ$							
ω		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
i'	20°	0,167 0,16935		0,189 0,18353		0,220 0,21130		0,394 0,37842	0,119 0,12547		0,134 0,13314		0,155 0,14772		0,190 0,18255	0,313 0,29555
	— 10°	0,214 0,22087		0,244 0,24460		0,289 0,28658		0,546 0,54325	0,159 0,17077		0,180 0,18591		0,208 0,20785		0,267 0,26607	0,458 0,45468
	0°	0,270 0,27606	0,289 0,29188	0,312 0,31132	0,341 0,33739	0,380 0,37539	0,442 0,41448	0,750 0,75000	0,214 0,22066	0,228 0,23161	0,244 0,24499	0,262 0,26186	0,286 0,28454	0,321 0,31807	0,379 0,37762	0,671 0,67100
	5°	0,298 0,30341	0,320 0,32271	0,347 0,34685	0,382 0,37922	0,428 0,42511	0,506 0,50508		0,243 0,24741	0,259 0,26182	0,278 0,27878	0,299 0,30000	0,328 0,32820	0,373 0,37090	0,446 0,44529	
	10°	0,326 0,33145	0,352 0,35435	0,384 0,38335	0,424 0,42263	0,480 0,47824	0,573 0,57370		0,273 0,27516	0,293 0,29319	0,315 0,31767	0,340 0,34159	0,376 0,37778	0,430 0,42989	0,520 0,52130	
	15°	0,353 0,35795	0,384 0,38651	0,422 0,42198	0,468 0,46837	0,535 0,53466			0,302 0,30415	0,325 0,32658	0,352 0,35332	0,385 0,38672	0,430 0,43092	0,496 0,49505		
	20°	0,380 0,38436	0,416 0,41872	0,460 0,46085	0,514 0,51581				0,332 0,33381	0,358 0,36146	0,391 0,39435	0,434 0,43510				
	25°	0,406 0,40981	0,446 0,45038						0,363 0,36359	0,397 0,39728						
	30°	0,431 0,43301														

	Φ = 40°									Φ = 45°									
ω . . .	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
i′ —20°	0,083 0,09100		0,093 0,09431		0,106 0,10242		0,124 0,11860		0,239 0,21914	0,059 0,06398		0,066 0,06453		0,075 0,06912		0,085 0,07759			0,176 0,15800
i′ -10°	0,117 0,12538		0,132 0,13849		0,149 0,15148		0,178 0,17842		0,380 0,36873	0,086 0,09567		0,096 0,10095		0,108 0,11044		0,125 0,12210			0,291 0,28765
i′ 0°	0,167 0,17449	0,177 0,18213	0,189 0,19115	0,201 0,20159	0,216 0,21620	0,236 0,23557	0,265 0,26376	0,317 0,31591	0,587 0,58680	0,130 0,13595	0,137 0,14118	0,145 0,14717	0,154 0,15429	0,164 0,16305	0,176 0,17434	0,192 0,18987	0,217 0,21353	0,259 0,25739	0,500 0,50000
i′ 5°	0,195 0,20007	0,206 0,21036	0,219 0,22241	0,236 0,23638	0,256 0,25550	0,282 0,28061	0,319 0,31807	0,385 0,38544		0,157 0,16007	0,166 0,16740	0,175 0,17581	0,186 0,18572	0,198 0,19787	0,214 0,21336	0,235 0,23483	0,270 0,26713	0,328 0,32723	
i′ 10°	0,223 0,22806	0,237 0,24383	0,254 0,25714	0,274 0,27625	0,300 0,30334	0,333 0,33283	0,380 0,38104	0,466 0,46674		0,185 0,18753	0,196 0,19741	0,208 0,20894	0,222 0,22235	0,239 0,23903	0,260 0,26019	0,288 0,28900	0,332 0,33225		
i′ 15°	0,253 0,26089	0,272 0,27570	0,293 0,29576	0,318 0,32032	0,351 0,35120	0,391 0,39255				0,216 0,21803	0,229 0,23194	0,245 0,24718	0,258 0,26535	0,285 0,28747	0,315 0,31554	0,352 0,35356			
i′ 20°	0,285 0,29002	0,310 0,31235	0,336 0,33823	0,368 0,36926						0,251 0,25224	0,269 0,27031	0,289 0,29080							
i′ 25°	0,322 0,32374																		

bien que notre étude ne soit complète que dans le cas où i' est positif, nous avons donné quelques coefficients k relatifs à $i' < 0$. Tous ces arguments ont été pris de 5° en 5° comme l'a fait Résal sauf pour i' négatif auquel cas nous avons étudié seulement $i' = -10$ et $i' = -20$, et ω variant de 10° en 10°.

Il résulte, de cette comparaison, une concordance remarquable entre les coefficients k_0 et k non seulement pour i' positif ce qui, nous l'avons vu, est à prévoir, mais même pour i' négatif. En effet dans ce dernier cas, l'écart entre k_0 et k' peut devenir assez notable et on ne peut plus à proprement parler, considérer K, coefficient le meilleur de poussée, comme la moyenne arithmétique de k_0 et k'. Cependant c'est le seul coefficient qu'on peut proposer. D'un autre côté, nous n'avons aucune idée de l'ordre d'approximation des coefficients correspondants k_r ni du sens de cette approximation, comme nous l'avons montré plus haut.

CHAPITRE VI

Sommaire. — Quelques considérations sur les lignes de glissement des massifs pulvérulents. — Formules approchées donnant le coefficient de poussée d'un tel massif sur un mur.

Nous avons montré que, tout au moins lorsque l'inclinaison de la paroi est inférieure à celle du plan idéal de Maurice Lévy, le massif n'atteint l'équilibre-limite, dans le cas d'un renversement du mur, que dans le voisinage immédiat de ce même mur. Ainsi, le principe d'état ébouleux partout réalisé est en défaut. Il n'y a donc pas lieu de parler des lignes de rupture du massif qui constitueraient les enveloppes des directions de glissement en chaque point de ce massif et formeraient un double réseau de courbes. Cependant, il serait intéressant de connaître les enveloppes des directions des éléments, qui, en chaque point, résistent aux réactions les plus inclinées. Juste après le renversement ou même l'ébranlement du mur, la rupture du massif, d'abord localisée près de la paroi, se propage vers l'intérieur de la masse. Les lignes construites constituent les courbes probables de glissement correspondant à cette rupture retardée du massif ou tout au moins n'en sont pas très éloignées. C'est pour cette raison que nous désignons toujours ces lignes par la dénomination de lignes de glissement du massif. Bien plus si, au

moment de l'ébranlement du mur, nous désignons par φ l'angle d'inclinaison sur la normale à l'élément en un point sur lequel s'exerce la réaction la plus oblique, de cette réaction même, l'introduction d'un massif hétérogène de Boussinesq permet de supposer le principe d'état éboulleux partout réalisé. Il suffit pour cela d'imaginer un massif fictif où l'angle de frottement intérieur en un point est précisément φ.

L'angle φ, égal à Φ, ou angle de frottement intérieur effectif du massif contre le mur, diminue à mesure qu'on s'éloigne de la paroi. Tout le long d'un plan radial l'angle φ est le même. Soit i l'inclinaison du plan par rapport à la direction verticale, pour laquelle l'angle $\varphi = \varphi_2$ donne précisément le même plan pour plan idéal de Maurice Lévy. On atteint ainsi le gros du massif pour lequel les lignes de glissement sont des droites, les mêmes que celles du massif de Rankine où l'angle de frottement intérieur serait φ_1. Dans le coin particulier compris entre la paroi et le plan Maurice Lévy, ainsi défini, un premier réseau de lignes de glissement serait constitué par des droites radiales issues du sommet de la paroi. Le second réseau conjugué du premier serait constitué de lignes formant en chaque point l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ vers le haut avec la direction radiale correspondante. Comme l'angle φ varie, en fait, très peu, ces lignes sont presque des spirales logarithmiques. Elles correspondent à un massif hétérogène et pourraient être appelées « spirales logarithmiques hétérogènes ». Elles sont d'ailleurs très voisines des spirales logarithmiques mises en évidence par M. Caquot (1) et correspondantes à un angle φ partout constant égal à Φ. L'étude théorique des spirales hétérogènes, entreprise par M. Callandreau (2) est d'ailleurs très complexe.

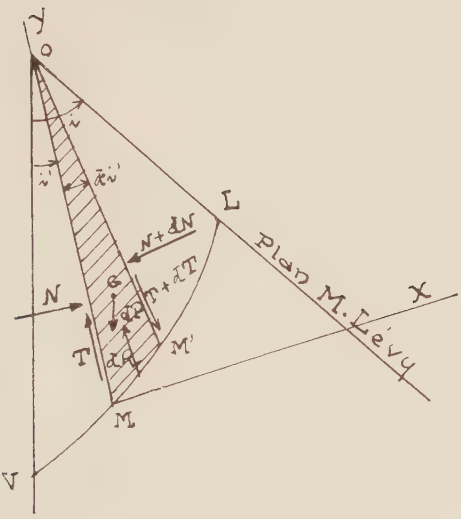

Fig. 10.

Remarquons ici que, l'assimilation à des spirales logarithmiques

(1) Caquot : ouvrage cité.

(2) Callandreau : *Bulletin de la Société de Mathématiques* (1932).

véritables des courbes de glissement, donne une méthode de construction très approximative de ces lignes. Cherchons maintenant le coefficient de poussée qu'on obtient grâce à cette assimilation.

Soit un cône élémentaire soumis aux différentes forces indiquées sur la figure et défini par son inclinaison i' sur la verticale. Le plan Maurice Lévy est défini par i.

Nous limiterons le coin à la spirale VMM'L :

$$r = l \times e^{-i' \operatorname{tg} \Phi}, \tag{69}$$

où

$$OV = l.$$

Prenons des axes auxiliaires (MX, MOY), rectangulaires.

OM étant une droite de glissement, on a :

$$N \operatorname{tg} \Phi \quad T.$$

En projetant sur OY les forces s'exerçant sur le cône élémentaire, on définit la réaction de R sur MM' qui passe par O. Du fait que VL est une spirale logarithmique, les deux autres équations de projection des forces sur OX et du moment par rapport à O sont identiques :

$$\left.\begin{aligned} & T di' - dN - \frac{\Pi}{2} r^2 \sin i' \, di' = 0, \\ \text{avec} \quad & T = N \operatorname{tg} \Phi. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Ainsi les équations d'équilibre sont vérifiées mais, du fait de l'inégalité des réactions sur MM' et OM, l'angle de la réaction la plus inclinée sur la normale en un point avec cette normale est supérieur à Φ. Le massif est trop résistant et le coefficient de poussée obtenu de cette façon est inférieur au véritable coefficient. L'intégration de l'équation (70) entre le mur et du plan de Maurice Lévy ainsi que le calcul de la réaction supportée par ce plan, donne :

$$\begin{aligned} k_1 = & \frac{e^{i' \operatorname{tg} \Phi}}{1 + 9 \operatorname{tg}^2 \Phi} \left[e^{-3i' \operatorname{tg} \Phi} (\cos i' + 3 \sin i' \operatorname{tg} \Phi) \right]_i^{i'} \\ & + e^{(i - 3i) \operatorname{tg} \Phi} \frac{\cos \Phi \cos i \cos (\omega - i)}{\sin (\Phi + i - \omega)}, \end{aligned} \tag{71}$$

k_1 étant le coefficient par lequel il faut multiplier le facteur Πr pour avoir une limite approximative et par défaut de la composante normale de la poussée.

Ce coefficient k_1 est relativement complexe et se prête mal au calcul. La comparaison numérique avec le coefficient k_0 (33) montre que k_1 est inférieur à k_0. Le coefficient k_1 est donc plus éloigné de la réalité que k_0 et par suite l'étude de k_1 ne présente pas beaucoup d'intérêt.

Remarquons que, le coefficient k_1 correspond à l'introduction d'un massif hétérogène analogue à celui de Boussinesq et nous pourrons

obtenir, de la même façon que ce dernier, un coefficient de poussée par excès.

Cette étude présentant peu d'intérêt et, étant encore plus complexe que celle de Boussinesq, nous ne retiendrons ici que le tracé, pratiquement très précis, des lignes de glissement à l'aide de spirales logarithmiques.

CONCLUSION

Nous avons essayé, dans cet exposé, de mettre en évidence tous les avantages que présente la méthode de Boussinesq sur les autres méthodes proposées jusqu'ici. Les conditions d'équilibre-limite partout réalisé et de glissement contre le mur au moment du renversement de ce dernier, étant en surnombre ou, ne pouvant pas être satisfaites toutes en même temps, nous avons vu que, néanmoins, la méthode de Boussinesq les assouplit par l'introduction de massifs hétérogènes convenablement choisis. Cette façon de voir permet non seulement d'affirmer que l'équilibre-limite n'est réalisé qu'aux environs immédiats du mur, ce qui est évident si on suppose comme essentielle la condition du glissement contre la paroi, mais encore, elle donne une évaluation de l'écart en chaque point entre l'équilibre réalisé et l'équilibre-limite. En particulier, au-dessus du plan idéal Maurice Lévy, cet écart est partout le même. S'il n'y a pas lieu de parler ainsi de lignes de glissement du massif, nous avons cependant donné ce nom à des lignes suivant lesquelles se propagerait l'éboulement après le renversement du mur. Remarquons enfin que, dans les méthodes autres que celle de Boussinesq, la condition de glissement du massif contre le mur est en général éliminée, ce qui est contraire à notre point de vue.

Relativement au plan-critique Maurice Lévy, plusieurs constructions géométriques très simples ont été données jusqu'ici. Nous en avons proposé une basée sur le fait que l'ellipse ~~des forces de Lamé~~ directrice en un point, a une forme constante.

Nous avons ensuite développé la méthode de Boussinesq dans le cas le plus général du talus plan quelconque et de mur d'inclinaison quelconque. Si l'inclinaison du mur est supérieure à celle du plan Maurice Lévy, les résultats de Rankine-Lévy sont applicables. Dans le cas contraire, en désignant par P_B la composante normale de la poussée par unité d'aire exercée par un massif sur un mur au moment du renver-

sement de ce dernier autour d'un axe horizontal de sa paroi intérieure, on a

$$P_B = K\Pi r,$$

où Π est le poids spécifique de la matière constituant le massif et r, la distance du point du mur étudié à l'origine. Le coefficient K est égal à :

$$K = \frac{k_0 + k'}{2},$$

où :

1° $$k_0 = \cos\varphi \cos(\omega - i') \frac{\cos(\varphi + \delta)\cos(\varphi + i)}{\cos(\omega - i)\cos(\varphi - \delta)},$$

i' étant l'inclinaison du mur par rapport à la verticale :

ω étant l'inclinaison du massif sur l'horizon :

φ étant l'angle de frottement intérieur de la matière ;

On a, de plus :

$$i = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\left(\text{arc sin}\,\frac{\sin\omega}{\sin\varphi} - \omega\right),$$

et $\delta = i - i'$.

2° $$k' = \frac{\cos(\varphi + i)\cos(\omega - i')\cos\varepsilon}{\cos(\omega - i)\cos(\varphi - \varepsilon)}\left[1 - \sin\Phi\sin(\varphi - \varepsilon + 2\delta)\right],$$

où :

ω et i' ont la même signification que ci-dessus ;

Φ est l'angle de frottement intérieur du massif et i et δ sont définis comme au (1°) ;

Enfin :

$$\cos\varepsilon = \frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}.$$

L'angle φ est enfin fourni par la formule approchée (59).

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

INTRODUCTION. — Historique de la question. — Intérêt de la méthode de Coulomb. — But du présent travail. 3

CHAPITRE PREMIER. — Hypothèses relatives aux « semi-fluides » et « massifs pulvérulents ». — Équations d'équilibre-limite d'un massif de terre pulvérulent et homogène. 6

CHAPITRE II. — Solution du massif indéfini de Rankine. — Solution particulière Maurice Lévy. — Méthode de Boussinesq. — Calculs de Résal. — Comparaison des différentes méthodes 12

CHAPITRE III. — Aperçu des résultats trouvés par Boussinesq et M. Callandreau. — Point de départ du présent travail 16

CHAPITRE IV. — Étude de la limite par excès. — Minimum unique et sa recherche pratique. — Formule approchée pour φ 22

CHAPITRE V. — Étude de la limite k_0 par défaut du coefficient de poussée. — Les coefficients k_s. — Les meilleurs coefficients pratiques K de poussée à envisager 51

CHAPITRE VI. — Quelques considérations sur les lignes de glissement des massifs pulvérulents. — Formule approchée donnant le coefficient de poussée d'un tel massif sur un mur. 58

CONCLUSION 61

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX. — 6672-6-38. — (Encre Lorilleux).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

ÉTUDE DES DIFFÉRENTS MODES D'EMPLOI DES FORMULES DE LAGRANGE EN MÉCANIQUE RATIONNELLE

Vu et approuvé :

Paris, le 27 juin 1938.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

G. ROUSSY.